Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
Ano 2016

Eunice
de Jesus Mateiro

A matemática dos calendários

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
Ano 2016

Eunice de Jesus Mateiro

A matemática dos calendários

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Paulo José Fernandes Almeida, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha família pelo amor, apoio, confiança e motivação incondicional. Que sempre me impulsionem na direção das vitórias dos meus desafios.

o júri / the jury

presidente / president	**Professora Doutora Andreia Oliveira Hall** Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	**Professor Doutor Pedro Santos Freitas** Professor Auxiliar do Departamento de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
	Professor Doutor Paulo José Fernandes Almeida Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos

A realização da presente dissertação de mestrado contou com apoios e incentivos importantes sem os quais não se teria tornado esta realidade, e aos quais estarei eternamente grata.

Um agradecimento muito especial ao Prof. Dr. Paulo Almeida pelos incontáveis esforços, carinho e apoio na orientação deste trabalho. Mostrou-se sempre disponível e disposto a ajudar, ensinando-me o melhor caminho para absorção de conhecimento. O Prof. Dr. Paulo Almeida foi e é uma referência profissional e pessoal para o meu crescimento. Muito obrigada por estar ao meu lado e por acreditar em mim.

Ao meu querido esposo, Bruno, por ser tão importante na minha vida. Sempre ao meu lado, colocando-me para cima e por acreditar que posso mais do que imagino. Obrigada por teres feito do meu sonho o nosso sonho!

Ao meus irmãos, Bárbara e David, o meu agradecimento especial, pois, cada um da sua maneira, sempre se orgulharam de mim e confiaram no meu trabalho. Obrigada pela confiança!

Por último, tendo consciência que sozinha nada disso teria sido possível, dirijo um agradecimento especial aos meus pais, por serem modelos de coragem, pelo apoio incondicional, incentivo, amizade e paciência demonstrados ao longo desta caminhada.

Ninguém vence sozinho! OBRIGADA A TODOS.

palavras-chave

Frações continuadas, congruências, calendários lunar, lunissolar, solar, calendários islâmico, hebreu, juliano, gregoriano, ciclos metónico, *octaeteris*

Resumo

Ao longo da história da humanidade, os diferentes povos sempre demonstraram uma preocupação em definir datas e eventos. Neste sentido, pretende-se com este trabalho compreender as relações entre certos fenómenos da natureza, nomeadamente o ciclo da lua e o ciclo do sol na implementação dos calendários. Repara-se que os calendários são baseados nas observações astronómicas, e que a duração destes ciclos não corresponde a um número inteiro de dias, levando por isso a diferentes problemas, quando se tenta organizar os dias em períodos de tempo fixos. Na tentativa de solucionar este problema, foram criados calendários com um número inteiro de dias, onde cada sociedade usou ou usa o fenómeno mais adaptado à sua situação geográfica, religiosa e política. Constatou-se a existência de diferentes realidades: por um lado se destacam os povos que viviam em locais onde não existe um sazonalidade acentuada e que ainda hoje utilizam o ciclo lunar, mesmo após ter havido uma grande expansão da sua localização, como é o caso da população muçulmana; por outro lado tem-se os povos onde existem estações do ano bem definidas, nomeadamente o povo egípcio (devido ao comportamento do rio Nilo).

Podem associar-se a esta tentativa de organizar o tempo, diferentes aspetos matemáticos, entre os quais os convergentes tirados das frações continuadas e as congruências. Os convergentes utilizados são números racionais muito próximos de certas constantes astronómicas, e as congruências permitem observar a repetição do mesmo padrão ao longo do tempo, para cada calendário.

Neste trabalho, foi feita uma análise detalhada do conteúdo matemático, dos calendários estudados, assim como da história destes calendários. Dos resultados obtidos destaca-se por um lado, o facto de que no calendário gregoriano, utilizado na nossa sociedade, existir a diferença de um dia relativamente ao calendário solar astronómico a cada 3300 anos, e por outro lado, o ano 46 a.C. ter tido 445 dias.

keywords

Continued Fractions, congruences, lunar, luni-solar, solar calendar, Islamic, Hebrew, Julian, Gregorian calendar, metonic, *octaeteris* cycles

abstract

Throughout human history, people have always shown a concern about how to mark dates and events. In this sense, the aim of this work was to understand the relationship between certain phenomena of nature, including the cycle of the moon and the cycle of the sun, in the implementation of calendars. Notice that the calendars are based on astronomical observations, and that the duration of these cycles does not correspond to a whole number of days, leading therefore to different problems when one tries to organize the days in fixed periods of time. In an attempt to solve this problem, calendars were created with a whole number of days, where each society group has used or uses the most appropriate phenomenon to its geographical, religious and political situation. It was found that there are different realities: on the one hand stands the people who lived in places where there is a marked seasonality and still use the lunar cycle, even after having been a major expansion of its original location, as is the case of the Muslim population; on the other hand there are people where the seasons are very well defined, in particularly the Egyptian people (due to the behavior of the Nile).

Different mathematical aspects may be associated with this attempt to divide the time, including the convergents taken from continued fractions and congruences. The convergents we are going to use are rational numbers that are very close to certain astronomic constants, and congruences will be used to detect the repetition of certain patterns over time for each calendar.

In this work, a detailed analysis of the mathematical content of the studied calendars was made, as well as the history of these calendars. From the results we highlight, on the one hand, the fact that in the Gregorian calendar, used in our society, there is a difference of one day, in relation to the solar calendar (astronomical) every 3300 years, and on the other hand, the year 46 ac having had 445 days.

Introdução

“O calendário exprime o ritmo de atividade colectiva ao mesmo tempo que tem por função assegurar a sua regularidade.”
Émile Durkheim

Ao longo da história da humanidade, o calendário constituiu e constitui um elemento importante na cultura das diferentes civilizações, como é o caso dos povos Egípcio ou Romano. O termo calendário vem do latim *calendarium* dando origem ao termo *calendae*, este corresponde ao primeiro dia do mês Romano. Repare-se que, uma das primeiras coisas que uma criança aprende na escola é a data. Esta exprime-se pelo nome do dia da semana, número do dia, nome do mês e pelo ano. Contudo, considera-se crucial referir que esta data refere-se a um tempo falsamente universal. Assim, pode afirmar-se que dominar o tempo é escolher uma origem, o mais longínqua possível, para poder testemunhar uma longa história.

Neste contexto, o calendário é (ver [19], tradução própria)

> uma produção humana, que reflete o rasto da história religiosa, política e cultural das diferentes sociedades, bem como a interligação entre as mesmas. Contudo, ele foi consecutivamente ajustado e modificado ao longo dos séculos, com o objetivo de representar o mais exato possível os grandes ritmos diurno, lunar e anual que condicionavam e condicionam a vida dos Homens.

Com o intuito de agrupar os dias solares seguindo um ciclo lunar e/ou um ciclo solar (o das estações do ano), estes três fenómenos físicos sem ligação aparente levaram à criação e ao desenvolvimento de um conjunto de calendários, de acordo com diferentes povos.

O dia é a unidade básica de tempo que relaciona todos os calendários, mas vários calendários usam convenções diferentes para estruturar os dias em unidades maiores: semanas, meses, anos e ciclos de anos. A duração do dia é de 23 horas, 59 minutos e 39 segundos a 24 horas, 0 minutos e 30 segundos, dependendo do dia do ano, dado que a rotação da Terra tem uma trajetória elíptica. Por conseguinte, a duração média de um dia solar é de 24 horas, 0 minutos e 0 segundos, que corresponde a 86400 segundos.

A Lua é o satélite natural da Terra, existem dois períodos associados ao seu movimento o período Sideral e o período Sinódico. O ciclo lunar, também chamado período Sinódico da Lua, tem uma duração média de 29,530589 dias. Este período representa a duração que separa duas Luas novas, e desta constante astronómica resulta uma alternância de 29 ou 30 dias por mês. Isto permite determinar um período mais pequeno – a semana. Esta corresponde a sete dias e está intimamente ligada a um quarto do ciclo lunar. O ano lunar é constituído de 12 ciclos lunares, e corresponde a 354 dias ou ocasionalmente 355 dias. Isto ocorre para manter o ciclo lunar sincronizado com o ano lunar. O período Sideral, é o tempo que a Lua demora a completar uma volta ao redor da Terra, tem uma duração de 27,3 dias. Neste sentido, existe uma diferença de 2,25 dias entre o período Sideral e o período Sinódico, sendo o período Sinódico mais longo.

O ano solar consiste na duração que separa dois equinócios da primavera. A constante astronómica do ano solar é de 365,24219878 dias, isto é, 365 dias, 48 minutos e 46 segundos. Desta constante resultam anos com 365 dias ou com 366 dias. Repare-se que exitem diferentes povos que usaram e usam este ciclo solar, sendo que cada um deles opta pelo "sistema" que melhor se adequa ao seu modo de vida. O ano solar tem quatro estações do ano.

O sistema de calendários lunissolar tenta conjugar o ciclo lunar ao ciclo solar. Os dois ciclos têm uma diferença de onze dias, sendo que já houve várias tentativas para solucionar este problema.

Nesta dissertação apresentam-se os sistemas de calendários lunar, solar e lunissolar que estão intimamente relacionados com o ciclo lunar e/ou solar. Com o intuito de contribuir para uma melhor compreensão destes calendários, a presente dissertação pretende analisar detalhadamente o conteúdo matemático, a história dos calendários e a sua interligação.

As dificuldades encontradas pelos diferentes povos em diferentes regiões estão associadas ao desejo de querer escrever no seu calendário a realidade mencionada anteriormente, pois as décimas que se encontram depois da vírgula correspondem a fragmentos do dia. Contudo, um dia é um número inteiro de horas. Assim sendo, começaram a fazer-se diferentes escolhas segundo o Homem, o meio envolvente e a civilização. Apesar das inúmeras tentativas e escolhas feitas, concluiu-se que os erros são cada vez menores, porém ainda não se conseguiu chegar, até aos dias de hoje, à precisão.

Esta dissertação encontra-se dividida por diferentes capítulos, correspondendo o primeiro capítulo aos conceitos básicos associados à área da Teoria dos Números, com especial incidência nas frações continuadas, nos convergentes e nas congruências. Seguidamente, apresenta-se a parte prática, correspondendo aos capítulos dois, três e quatro, que se dedica ao estudo dos sistemas de calendários lunar (islâmico), lunissolar (grego e hebreu) e solar (juliano, gregoriano, persa, Von Mädler e o republicano). Por fim, são apresentadas as principais conclusões, limitações e propostas para futuras investigações.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Capítulo 1

Conceitos básicos

Na presente dissertação utiliza-se aproximações racionais, os convergentes, de constantes astronómicas, sem explicar a sua origem. Claro que os povos conseguiram encontrá-las com paciência e tentativas. No entanto, existe um método para obter tais aproximações – as frações continuadas. Estas foram estudadas por grandes matemáticos de toda a história, por exemplo, Lagrange, Galois, Fermat, Euler, Liouville entre outros.

Termina-se este capítulo com uma pequena introdução do conceito de congruência e a explicação das suas propriedades. As congruências constituem uma ferramenta muito importante no cálculo dos ciclos. Os conceitos de congruência foram desenvolvidos por Carl Friedrich Gauss no início do século XIX. Carl Friedrich Gauss foi um astrónomo, matemático e físico alemão, e é considerado o príncipe da matemática. Ele é considerado ao mesmo tempo o último dos clássicos e o primeiro dos modernos. Isto é, ele resolveu *problemas clássicos com métodos modernos* (ver [28]).

Este capítulo é adaptado do livro [22]. Outros livros como [13] e [26] foram consultados para comparar os resultados.

1.1 Frações continuadas

Para compreender as frações continuadas, estuda-se o algoritmo de Euclides, um método simples para encontrar o máximo divisor comum entre dois números.

Definição 1.1. *Sejam a e b dois inteiros não nulos, o* máximo divisor comum *é o maior inteiro que divide simultaneamente a e b.*

A notação do máximo divisor comum entre a e b é dada por (a, b).

Teorema 1.2 (Algoritmo de Euclides)**.** *Seja x_0 e x_1 dois números inteiros não negativos, $x_0 = a$ e $x_1 = b$, $b \neq 0$. Aplica-se sucessivamente o algoritmo da divisão de Euclides e obtém-se*

$$x_i = x_{i+1}q_{i+1} + x_{i+2}$$

com $0 < x_{i+2} < x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, ..., n-3$ e $x_n = 0$. Então $(a, b) = x_{n-1}$, o último resto diferente de zero.

Demonstração.
Seja $d = (a, b)$, prova-se por indução que $d \mid x_k$, para qualquer $0 \leq k \leq n-1$.
Como $d \mid a$ e $d \mid b$ tem-se que $d \mid (a - bq_1)$, ou seja, $d \mid x_2$. Como $d \mid b$ e $d \mid x_2$ então $d \mid (b - x_2q_2) = x_3$.
Suponha-se que $d \mid x_{k-1}$ e $d \mid x_k$, prova-se que $d \mid x_{k+1}$. Pela hipótese de indução, obtém-se $d \mid (x_{k-1} - x_kq_k)$. Como $x_{k-1} - x_kq_k = x_{k+1}$ portanto $d \mid x_{k+1}$.
Provou-se que $d \mid x_k$ para qualquer $0 \leq k \leq n-1$. Em particular $d \mid x_{n-1}$.

Seja $x_0 = a$ e $x_1 = b$ dois números inteiros positivos $a \geq b$. Seja $d = (a, b)$.
Divide-se x_0 e x_1, onde o quociente é q_1 e o resto é x_2. Tem-se

$$x_0 = q_1 \times x_1 + x_2 \ .$$

Divide-se x_1 pelo resto x_2, o quociente é q_2 e o resto é x_3. Obtém-se

$$x_1 = q_2 \times x_2 + x_3 \ ,$$

etc.
Como os números inteiros x_i são decrescentes, mais cedo ou mais tarde, tem-se o resto $x_n = 0$, isto é,

$$x_{n-2} = q_{n-1} \times x_{n-1} \ .$$

Portanto, x_{n-1} divide x_{n-2} e por recorrência todos os x_i, com $0 \leq i \leq n-1$. Em particular, x_{n-1} divide a e divide b, logo divide também d.
Portanto $d = x_{n-1}$. □

Exemplo 1.3. *Encontra-se* $(48, 13)$, *pela aplicação do algoritmo de Euclides.*

$$\begin{aligned} 48 &= 3 \times 13 + 9 \\ 13 &= 1 \times 9 + 4 \\ 9 &= 2 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 \ . \end{aligned}$$

Assim $(48, 13) = 1$.

Seja r um número real estritamente positivo, substitui-se os dois inteiros x_0 e x_1 do algoritmo de Euclides por $a_0 = \lfloor r \rfloor$, a parte inteira de r, e $b_0 = r - a_0$, a parte decimal de r. Define-se a partir de r , a_n e b_n ao calcular sucessivamente:

$$\begin{aligned} r &= a_0 \times 1 + b_0 \\ 1 &= a_1 \times b_0 + b_1 \\ b_0 &= a_2 \times b_1 + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i-2} &= a_i \times b_{i-1} + b_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nesta lista, todos os a_i são inteiros positivos e todos os b_i sucedem em ordem decrescente $0 \leq b_i < b_{i-1}$. Se $b_i = 0$ o número r é racional. Nos outros casos, as sequências $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e $b_0, b_1, b_2, \ldots$ são infinitas.

Tem-se as igualdades seguintes

$$r = a_0 + b_0 = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_1}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b_0}{b_1}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_2}{b_1}}} \ .$$

Assim, o número r está definido em fração continuada. Os convergentes são

$$a_0 \ ; \ a_0 + \frac{1}{a_1} \ ; \ a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \ ; \ \ldots \ .$$

Denota-se a fração continuada de r por $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Como a_0 é a parte inteira de r, separa-se a_0 por um ponto e virgula do resto dos outros a_i.

Exemplo 1.4. *Representa-se* $\frac{48}{13}$ *sob a forma de fração continuada*

$$\frac{48}{13} = 3 + \frac{9}{13} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{9}}$$

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{4}}$$

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}\,.$$

A fração continuada é,

$$\frac{48}{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}\,.$$

Ou seja, $r = [3; 1, 2, 4]$.

Definição 1.5. *Uma fração continuada finita é uma expressão da forma*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *são números reais com* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *positivos.*

Definição 1.6. *Uma fração continuada infinita é uma expressão da forma*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ *são números reais com* $a_1, a_2, a_3, ...$ *positivos.*

Uma fração continuada é chamada *simples* se os números reais $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ forem inteiros.

Definição 1.7. *Sejam* $n, k \in \mathbb{N}_0$*, com* $k \leq n$*,* $a_0 \in \mathbb{N}_0$ *e* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *inteiros positivos. À fração continuada* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ *chama-se* convergente de ordem k *de qualquer fração continuada, finita ou infinita, das formas* $[a_0; a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ *ou* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots]$*, onde* $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$*, são inteiros positivos. A notação do convergente de ordem* k *é* C_k*.*

Os convergentes são representados por $C_0 = [a_0]$, $C_1 = [a_0; a_1]$, $C_2 = [a_0; a_1, a_2]$,... .

No teorema 1.8 é enunciado o algoritmo para determinar os convergentes de uma fração continuada.

Teorema 1.8. *Sejam* $a_0; a_1, a_2, ..., a_n$ *números reais, com* $a_1, a_2, ..., a_n$ *positivos. As sequências* $p_0, p_1, ..., p_n$ *e* $q_0, q_1, ..., q_n$ *são definidas recursivamente, por*

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 & q_1 = a_1 \\ \ldots & \ldots \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array}$$

para $k = 2, 3, ..., n$*.*
Então o convergente de ordem k*,* $C_k = [a_0; a_1, ..., a_k]$ *é dado por*

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}\,.$$

Demonstração.
O resultado obtém-se por indução matemática.
Para $k = 0$, tem-se

$$C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}\,.$$

Para $k = 1$, tem-se

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}\,.$$

Neste sentido, o resultado verifica-se para $k = 0$ e $k = 1$.

Assume-se que o resultado é válido para um inteiro positivo k e $2 \leq k < n$. Tem-se

$$C_k = [a_0; a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} .$$

Todos os números reais p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1} e q_{k-2} só dependem de a_0, a_1, ..., a_{k-1}.

Agora

$$\begin{aligned}
C_{k+1} = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}] &= \left[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] \\
&= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\
&= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\
&= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} .
\end{aligned}$$

Verifica-se que o resultado é válido para $k + 1$. $\square$

O exemplo seguinte ilustra o teorema 1.8.

Exemplo 1.9. *Encontram-se os primeiros quatro convergentes da fração continuada de* π*,* $[3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$*, usando o teorema 1.8. Calcula-se as sequências* p_i *e* q_i *para* $i = 0, 1, 2, 3$*, obtém-se*

$$\begin{aligned}
p_0 &= 3 & q_0 &= 1 \\
p_1 &= 3 \cdot 7 + 1 = 22 & q_1 &= 7 \\
p_2 &= 15 \cdot 22 + 3 = 333 & q_2 &= 15 \cdot 7 + 1 = 106 \\
p_3 &= 1 \cdot 333 + 22 = 355 & q_3 &= 1 \cdot 106 + 7 = 113 .
\end{aligned}$$

Os convergentes de ordem 0, 1, 2 e 3 são

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} = 3$$
$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}142857142857$$
$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509433962$$
$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}141592920354\ .$$

O valor de π é de 3,14159265359..., *os convergentes encontrados são muito próximos deste valor.*

1.2 Congruências

As noções de congruência abordadas nesta secção são muito importantes para a teoria dos números.

Sejam a e b dois inteiros, dividi-se a por b e obtém-se um quociente q e um resto r, que satisfaz a seguinte relação:

$$a = b \times q + r, \qquad\qquad 0 \leq r < b\ .$$

O exemplo seguinte mostra a aplicação deste resultado.

Exemplo 1.10. *Hoje é terça-feira, que dia da semana será daqui a 19 dias?*

Numa semana existem 7 dias, este valor corresponde a b. Pretende analisar-se o que se passa daqui a 19 dias, sendo este valor a. Este tipo de questão é facilmente respondida ao encontrar o resto da divisão de 19 por 7. Pela divisão euclidiana, tem-se ($19 = 2 \times 7 + 5$), existem 14 dias que correspondem a duas semanas completas (ao contrário do que indica a conhecida expressão *daqui a quinze dias*), portanto será novamente terça-feira. Vê-se assim, que só o resto da divisão vai alterar o dia da semana. Adicionar 19 dias ou adicionar 5 dias vai dar o mesmo dia da semana, desta forma a questão pode ser reformulada, *Hoje é terça-feira, que dia da semana será daqui a 5 dias?*. Assim, basta contar cinco dias a partir de terça-feira para saber o dia da semana, o resultado é Domingo. Pode concluir-se que daqui a 19 dias, o dia da semana é domingo.

Quando se trabalha com ciclos, o importante é encontrar o resto, em matemática este raciocínio é traduzido pelas congruências.

Nos ciclos associam-se números inteiros 0 até $m-1$, a cada elemento do ciclo de m elementos, na ordem que eles se apresentam. No caso dos dias da semana, o zero corresponde ao domingo e o seis ao sábado.

De uma maneira geral, calcular a congruência significa calcular o resto da divisão, r, de a por m. A notação é

$$r = a \mod m.$$

Definição 1.11. *Sejam a e b inteiros e m um inteiro positivo. Diz-se que a é* congruente *com b se $m \mid (a-b)$.*

Se a é *congruente* com b módulo m, a notação é $a \equiv b \mod m$.
Se $m \nmid (a-b)$, com notação de $a \not\equiv b \mod n$, e diz-se que a é *incongruente* com b módulo m.

Exemplo 1.12. *Tem-se que* $30 \equiv 2 \mod 4$ *visto que* $4 \mid (30-2) = 28$.

Vários fenómenos na nossa vida são baseados nas congruências, por exemplo, os relógios trabalham com o módulo 12 para 24 horas (1 dia), tem-se módulo 60 para os minutos e os segundos, os calendários usam módulo 7 para os dias da semana e módulo 12 para os meses.

Teorema 1.13. *Se a e b são inteiros, então $a \equiv b \mod m$ se e somente se existe um inteiro k tal que $a = b + km$.*

Demonstração.
Se $a \equiv b \mod m$ então $m \mid (a-b)$, isto significa que existe um inteiro k com $km = a-b$, então tem-se $a = b + km$.
Inversamente, se existe um inteiro k com $a = b + km$, então $km = a - b$, tem-se que $m \mid (a-b)$, e consequentemente, $a \equiv b \mod m$.

□

Exemplo 1.14. *Tem-se que* $27 \equiv 3 \mod 12$ *e* $27 = 3 + 2 \times 12$.

O teorema seguinte estabelece algumas propriedades importantes das congruências.

Teorema 1.15. *Seja m um inteiro positivo. As congruências módulo m satisfazem as seguintes propriedades:*

i. *Propriedade reflexiva: Se a é um inteiro, então $a \equiv a \mod m$.*

ii. *Propriedade simétrica: Se a e b são inteiros tais que $a \equiv b \mod m$, então $b \equiv a \mod m$.*

iii. *Propriedade transitiva: Se a, b e c são inteiros com $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m$ então $a \equiv c \mod m$.*

Demonstração.

i. Tem-se que $a \equiv a \mod m$ visto que $m \mid (a - a) = 0$.

ii. Se $a \equiv b \mod m$, então $m \mid (a - b)$. Assim, existe um inteiro k com $km = a - b$. Isto mostra que $(-k)m = b - a$, então $m \mid (b - a)$.
Consequentemente $b \equiv a \mod m$.

iii. Se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m$, então $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$. Assim, existe dois inteiros k e l com $km = a - b$ e $lm = b - c$. Por conseguinte, $a - c = (a - b) + (b - c) = km + kl = b - c$.
Consequentemente $m \mid (a - c)$ e $a \equiv c \mod m$.

□

Do teorema 1.15, vê-se que um conjunto de inteiros está dividido em m conjuntos diferentes chamados *classes de congruências módulo m*, cada uma contêm reciprocamente *congruente módulo m*.

Seja a um inteiro. Dado um inteiro positivo m, $m > 1$, pelo algoritmo da divisão, tem-se $a = bm + r$ onde $0 \leq r \leq m - 1$.

Da equação $a = bm + r$, tem-se que $a \equiv r \mod m$. Por isso, cada inteiro é congruente módulo m a um dos inteiros do conjunto $0, 1, ..., m - 1$ chamados de resto quando é dividido por m. Visto que não existem dois inteiros $0, 1, ..., m-1$ que sejam congruentes módulo m. Tem-se m inteiros, de maneira que cada inteiro é congruente a exatamente um dos m inteiros.

Definição 1.16. *Um sistema completo de resíduos módulo m é um conjunto de inteiros tais que cada inteiro é congruente módulo m a exatamente um inteiro desse conjunto.*

Frequentemente faz-se aritmética com as congruências. As congruências têm muitas das mesmas propriedades que as igualidades têm. Primeiro, mostra-se que a adição, subtração ou a multiplicação nos dois membros da congruência conserva a congruência.

Teorema 1.17. *Se a, b, c e m são inteiros com $m > 0$ tal que $a \equiv b \mod m$, então*

i. $a + c \equiv b + c \mod m$

ii. $a - c \equiv b - c \mod m$

iii. $ac \equiv bc \mod m$

Demonstração.
Como $a \equiv b \mod m$, tem-se que $m \mid (a - b)$

i. Pela identidade, $(a + c) - (b + c) = a - b$, então $m \mid ((a + c) - (b + c))$.

ii. $a - c \equiv b - c \mod m$ pelo facto que $(a - c) - (b - c) = a - b$.

iii. Observa-se que $ac - bc = c(a - b)$, como $m \mid (a - b)$, tem-se que $m \mid c(a - b)$ por este motivo $ac \equiv bc \mod m$.

□

Exemplo 1.18. *Seja $15 \equiv 1 \mod 7$, usando o teorema 1.17 tem-se que*

$$20 = 15 + 5 \equiv 1 + 5 = 6 \mod 7$$

$$12 = 15 - 3 \equiv 1 - 3 = -2 \mod 7$$

$$30 = 15 \times 2 \equiv 1 \times 2 = 2 \mod 7$$

No exemplo seguinte, mostra-se que não é necessariamente verdade que a congruência preserva a divisão nos dois membros.

Exemplo 1.19. *Tem-se que $14 = 7 \times 2 \equiv 4 \times 2 = 8 \mod 6$. Mas $7 \not\equiv 4 \mod 6$.*

O teorema 1.20, mais geral que o teorema 1.17, é também muito útil.

Teorema 1.20. *Se a, b, c e m são inteiros com $m > 0$ tal que $a \equiv b \mod m$, e $c \equiv d \mod m$ então*

i. $a + c \equiv b + d \mod m$

ii. $a - c \equiv b - d \mod m$

iii. $ac \equiv bd \mod m$

Demonstração.
Se $a \equiv b \mod m$ então $m \mid (a-b)$, existe um inteiro k tal que $a-b=km$ e se $c \equiv d \mod m$ então $m \mid (c-d)$, existe um inteiro l tal que $c-d=lm$.

i. Observa-se que $(a+c)-(b+d)=(a-b)-(c-d)=km+lm=(k+l)m$.
   Assim $m \mid ((a+c)-(b+d))$ então $a+c \equiv b+d \mod m$.

ii. Observa-se que $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)=km-lm=(k-l)m$.
    Assim $m \mid ((a-c)-(b-d))$ então $a-c \equiv b-d \mod m$.

iii. Observa-se que $ac-bc=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d)=ckm+blm=(ck+bl)m$.
     Assim $m \mid (ac-bd)$ então $ac \equiv bd \mod m$.

□

Exemplo 1.21. *Como* $13 \equiv 8 \mod 5$ *e* $7 \equiv 2 \mod 5$, *usado o teorema 1.20 tem-se que*

$$\begin{aligned} 20 = 13+7 \equiv 8+2 \equiv 0 \mod 5 \\ 6 = 13-7 \equiv 8-7 \equiv 1 \mod 5 \\ 91 = 13 \times 7 \equiv 8 \times 2 = 16 \mod 5. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Calendários lunares

"Seguir a lua ao longo dos meses"
Jean Leford (ver [16])

O presente capítulo incide sobre um dos diversos fenómenos que foram detetados associados aos calendários, mais especificamente o caso do sistema de calendários lunares. Repara-se que, até aos dias de hoje, este sistema de calendários é assumido como sendo o mais primitivo e como tal está intimamente relacionado com as fases da lua. Como vai ser abordado em seguida, pode adiantar-se que o ciclo das diferentes fases da lua dá origem ao mês, que corresponde teoricamente ao ciclo lunar. Para além deste ciclo, pretende abordar-se outro aspeto relevante, nomeadamente o calendário islâmico. Neste capítulo, fazem-se várias vezes referência aos calendários juliano e gregoriano quando são mencionadas datas do calendário islâmico, estas referências servem como elemento de localização relativamente ao nosso calendário.

2.1 O ciclo lunar

O *ciclo lunar* ou também denominado *mês lunar* é o tempo decorrido entre duas luas novas. A duração de um ciclo lunar pode variar entre 29 dias e 6 horas a 29 dias e 20 horas, resultado da complexidade do movimento da lua em torno da Terra. Com base na astronomia e após um grande número de observações e estudos nesta área, concluiu-se que a duração média de um ciclo lunar é de 29,530589 dias, isto é, 29 dias, 12 horas, 44 minutos e 3 segundos (ver [17]).

O mês lunar de 29,530589 representado em fração continuada, é dado por:

$$[29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, ...] = 29 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{16 + ...}}}}}} .$$

Truncando esta representação, obtêm-se os seguintes convergentes

$$29 \ ; \ 30 \ ; \ 29 + \frac{1}{2} \ ; \ 29 + \frac{8}{15} \ ; \ 29 + \frac{9}{17} \ ; \ 29 + \frac{26}{49} \ ; \ 29 + \frac{425}{801} \ ; \ ... \ .$$

Cada aproximação encontrada anteriormente permite a construção do chamado ciclo. Tem-se a estrutura $29 + \frac{x}{y}$, onde x representa os dias a inserir num ciclo de y meses.

Um *dia*, período de vinte e quatro horas, é o tempo durante o qual a Terra dá uma volta sobre o seu próprio eixo. Neste sentido, o mês é composto de um número inteiro de dias, caso contrário, existiriam meses a começar à meia-noite, outros às 6 horas da manhã, etc. Por observação humana, os nossos antepassados concluíram que um mês lunar era composto de 29 dias ou de 30 dias. Repare-se que este resultado é confirmado quando se analisa os convergentes do mês lunar, pois o primeiro convergente é 29 e o segundo é 30. O convergente $29 + \frac{1}{2}$ também é utilizado na construção do ano lunar, pois representa uma boa aproximação do mês lunar. Note-se que um mês de 29,5 dias é mais curto que o mês lunar em 0,030589 dias, isto é, 44 minutos e 3 segundos.

O ano lunar também equivale a 12 meses. Um ano lunar tem 354 dias, $(29,5 \times 12)$. Como o mês lunar tem 29,530589 dias, um *ano lunar* (isto é doze meses lunares) tem exatamente 354,367068 dias, isto é, 354 dias 8 horas 48 min e 33 segundos. Observa-se que existe um adiantamento de 0,367068 dias, isto é, 8 horas 48 min e 33 segundos. Para compreender a influência deste resultado a longo prazo, é importante estudar a representação do ano lunar em fração continuada. O ano lunar de 354,367068 dias é representado por

$$[354; 2, 1, 2, 1, 1, 1, ...] = 354 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + ...}}}}}}} .$$

Tem-se os convergentes

$$354 \ ; \ 354 + \frac{1}{2} \ ; \ 354 + \frac{1}{3} \ ; \ 354 + \frac{3}{8} \ ; \ 354 + \frac{4}{11} \ ; \ 354 + \frac{7}{19} \ ; \ 354 + \frac{11}{30} \ ; \ 354 + \frac{29}{79} \ ... \ .$$

Cada convergente encontrado anteriormente permite a construção do chamado ciclo. Tem-se a estrutura $354 + \frac{x}{z}$, onde x representa os dias a inserir num ciclo de z anos. O primeiro convergente encontrado, 354 dias, corresponde ao número de dias de um ano comum no calendário lunar. Os outros convergentes consistem em 354 dias, aos quais se adiciona uma fração. Esta relaciona os dias a adicionar (numerador) durante um ciclo de anos (denominador).

No convergente $354 + \frac{1}{2}$, o ano tem 354 dias e é adicionado 1 dia a cada 2 anos. Portanto, existem dois anos com um número de dias diferente, um ano com 354 dias e o outro com 355 dias, a média de dias por ano passa a ser de 354,5. Num ano lunar médio com 354,5 dias o ano tem um atraso de 0,132932 dias, isto é, 3,2 horas, relativamente ao ano lunar. Em 30 anos obtém-se um atraso de 4 dias, como tal este convergente não permite uma boa aproximação do ano lunar.

O convergente $354 + \frac{1}{3}$, tem 354 dias e 1 dia é inserido a cada 3 anos. Os três anos são compostos por 2 anos de 354 dias e um ano de 355 dias, tem-se um ano lunar médio de 354,333333 dias. Um ano com 354,333333 dias, leva a 0,033735 dias a menos que o ano lunar, (354,333333 − 354,367068), tem um adiantamento de 48,6 minutos por ano.

Em 30 anos o adiantamento é de 1 dia. Isto mostra que num período de 30 anos são adicionados 10 dias, e existe ainda um adiantamento de 1 dia. Este convergente não é a melhor aproximação para o ano lunar, mas permite uma boa comparação com um dos convergentes encontrados para o ano lunar.

Percorrendo os convergentes encontrados para o ano lunar, o convergente $354+\frac{11}{30}$ tem um ano de 354 dias e são inseridos 11 dias num ciclo de 30 anos. Portanto, existem 19 anos com 354 dias e 11 anos com 355 dias, a média de dias do ano é de 354,366667. Este ano lunar médio esta adiantado de 4×10^{-4} dias, isto é, 34,7 segundos por ano. Em 30 anos, o ano lunar médio está adiantado de 0,0120399 dias, isto é, 17 minutos e 20,3 segundos. Este convergente é usado no calendário islâmico. O calendário islâmico é um calendário lunar, o mais utilizado atualmente. Para uma melhor compreensão do calendário lunar considera-se fulcral estudar o calendário islâmico, onde se pretende analisar a influência deste atraso a longo prazo (ver [17, 16]). Este calendário é abordado na secção 2.2.

Coloca-se em evidência que os outros convergentes não são analisados detalhadamente, contudo quando se escolhe um convergente com um denominador muito baixo o erro é muito maior. Tal pode ser observado na fração $\frac{1}{2}$. Já quando se opta por um denominador superior a 50, verifica-se uma clara dificuldade em explicar à população em que ano se deveria inserir um dia.

De referir que vários povos começaram a elaborar os seus próprios calendários com base no ciclo lunar, sendo exemplo disto o calendário egípcio (desenvolvido pelos egípcios) e o calendário romano (criado pelos romanos). No entanto, deve realçar-se que estes calendários sofreram alterações no decorrer dos anos. O calendário lunar foi importante para as populações nómadas, bem como, para aquelas que viviam do mar. Não obstante, este género de calendário tornou-se um problema para as populações que cultivavam, já que à semelhança do que acontece atualmente, também na antiguidade era necessário seguir as estações do ano para cultivar.

2.2 Calendário islâmico

O calendário islâmico é um calendário lunar em utilização nos dias de hoje. Como referido anteriormente, a unidade básica do calendário lunar é o mês lunar. Os calendários lunares seguem as fases da lua e ignoram o movimento do sol, daí conclui-se que o ano lunar não acompanha as estações do ano. Além do calendário lunar também existem outros calendários, como exemplo, o calendário solar, que segue os movimentos do sol (capítulo 3). O calendário gregoriano (utilizado pela sociedade portuguesa) é claramente um exemplo do calendário solar, já que possui quatro estações do ano onde cada uma corresponde a três meses do ano. No hemisfério norte, o verão, uma das quatro estações do ano, corresponde aproximadamente aos meses de julho, agosto e setembro.

O início do mês lunar era e continuada a ser definido pela observação humana, sendo que atualmente esta observação é somente utilizada para efeitos religiosos. O primeiro dia de cada mês lunar começa quando uma ténue lua nova que é percebida no céu ocidental depois do pôr-do-sol, um dia ou dois após a Lua Nova. Por outras palavras, devido a influência do factor humano, o primeiro dia de cada mês não é definido de maneira exata e os dias começam com o pôr-do-sol.

Para tornar o calendário islâmico mais previsível, menos dependente da observação da lua, menos ambíguo, assim como, para que o mesmo pudesse ser utilizado no mundo civil e de forma regular, sábios muçulmanos do século VIII desenvolveram o Calendário islâmico tabular. Este calendário tem o mesmo número de meses e de anos que o calendário islâmico inicial, mas os meses são determinados por cálculos aritméticos em vez da observação ou dos cálculos astronómicos.

O início da cronologia islâmica, isto é, o primeiro ano Hégira, 1 A. H., do latim Anno Hegirae, coincide com a sexta-feira, 16 de julho de 622 do calendário juliano. Esta data corresponde ao dia em que Maomé saiu de Meca para se refugiar em Medina. No entanto, os astrónomos consideram que o primeiro dia do primeiro ano Hégira, "era Hégira astronómica", começa na quinta-feira, 15 de julho de 622 do calendário juliano (ver [19]).

Como referido na secção anterior, o calendário islâmico é baseado no convergente $354 + \frac{11}{30}$. Num ciclo de 30 anos são adicionados 11 dias, os 30 anos têm exatamente 10631 dias, $354 \times 30 + 11$, que é aproximadamente o valor que se obteria se se usasse o ano lunar, ($354{,}367068 \times 30 = 10631{,}01204$). Como cada ano lunar tem 12 meses lunares num ciclo de 30 anos lunares têm-se 360 meses lunares (12×30). Os dias do ano lunar não são exatamente iguais aos do ano lunar islâmico, para se saber as diferenças deve calcular-se as aproximações do mês lunar islâmico e do ano lunar islâmico. Para isso analisam-se as relações entre os dias e os meses lunares, e entre os dias e os anos lunares.

No calendário islâmico, um ciclo de 30 anos tem 10631 dias e 360 meses, pode concluir-se que um mês lunar tem em média

$$\frac{10631}{360} = 29 + \frac{191}{360} = 29{,}530556 \text{ dias}$$

e o ano lunar (isto é doze meses lunares) tem em média

$$\frac{10631}{30} = 354 + \frac{11}{30} \text{ dias.}$$

O mês lunar islâmico apresenta apenas três segundos a menos relativamente ao mês lunar, isto é, $29{,}530556 - 29{,}530589 = -0{,}000033$ dias, deste facto, pode conclui-se que a aproximação do mês lunar islâmico encontrado num ciclo de 30 anos é muito boa, pois existe um adiantamento de 0,000401 dias num ano. Este resultado é confirmado com o convergente $354 + \frac{11}{30}$, resultado encontrado para o ano lunar islâmico (isto é doze meses lunares), já observado anteriormente. O adiantamento de 0,000401 dias, é encontrado ao fazer a diferença entre o ano lunar islâmico e o ano lunar, $(354{,}366667 - 354{,}367068)$, o que corresponde a um adiantamento de 34,7 segundos relativamente ao ano lunar.

Verifica-se que o ano lunar islâmico está sincronizado com o ano lunar (isto é doze meses lunares) durante 2500 anos, após este período de tempo há um adiantamento de 1 dia. Por enquanto, ainda não foi encontrada nenhuma solução para resolver este problema, o ano 1438 A. H. começou no dia 3 de outubro de 2016 no calendário gregoriano.

Ao estabelecer o ano lunar islâmico (isto é doze meses lunares) ficou definido que os meses ímpares têm 30 dias e os meses pares têm 29 dias, neste sentido, também ficou definido que em anos bissextos é adicionado um dia ao 12° mês, e o mês tem 30 dias em vez de 29 dias, como se pode ver no quadro 2.1 (ver [16]).

Quadro 2.1: Número de dias por mês no ano islâmico

Mês	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
N° de dias	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29 ou 30

Resumidamente ao adicionar 11 dias num período de 30 anos, obtêm-se boas aproximações para o mês lunar e para o ano lunar (isto é doze meses lunares). Deste facto, têm-se dois tipos de ano, os anos ditos comuns com 354 dias e os anos ditos abundantes, chamados anos bissextos, contêm 355 dias. Assim sendo, num ciclo de 30 anos têm-se

19 anos com 354 dias e 11 anos com 355 dias.

A seleção dos anos abundantes (355 dias) de entre os anos comuns (354 dias), num ciclo de 30 anos varia segundo o critério adotado para juntar um dia no 12° mês.

Em 30 anos, existem 11 anos bissextos, a escolha dos anos bissextos não é comum para os sábios que estudaram o calendário islâmico. Neste sentido, existem quatro versões para escolher os anos bissextos, começa-se com uma pequena apresentação de cada versão e em seguida apresentam-se um resumo no quadro 2.2.

Todos as versão consideraram o 2°, o 5°, o 13°, o 21°e o 24° ano como anos bissextos. Estas quatro versões possuem ligeiras diferenças na determinação dos anos bissextos. Na primeira e na segunda versão a diferença está no facto que a primeira versão escolhe o 15° ano para ano bissexto e a segunda versão escolhe o 16° ano. Ao comparar as outras versões entre eles, verifica-se que existe mais que uma diferença.

A primeira versão é "Algoritmo kuwaiti" de Kushyar ibn Labban, do século XI, e Ulugh Beg, do século XV. Este algoritmo tem como base as duas datas encontradas para o primeiro ano Hégira. Por exemplo, quando o ano começa na quinta-feira, este algoritmo é usado pela *microsoft* para converter as datas entre o calendário gregoriano (secção 3.3) e o calendário islâmico.

Já a segunda versão, a mais conhecida e usada, é utilizada para determinar as datas dos dias religiosos e dos feriados à volta do mundo. O ano bissexto islâmico A_{bis} é determinado pela fórmula $(14 + 11 \times A_{bis}) \mod 30 < 11$. Este algoritmo é usado no programa "editor Gnu Emacs". Vários autores usaram esta versão, entre eles destacam-se Mark E. Shoulson na conversão do calendário Java e Tarek Maani no conversor dos calendários Hijri (islâmico), gregoriano e juliano (ver [9]).

A terceira versão é de origem indiana, e faz referência ao calendário de Fatimid ou também conhecido como Misri ou Bohra.

Por último, a quarta versão é de Habash al-Hasib, do século IX, al-Biruni, do século X/XI, e Elias de Nisibis, do século XI. A terceira e a quarta versões consideraram que o 1 A. H. começou no dia 15 de julho de 622 do calendário juliano (ver [10]).

No quadro 2.2 estão definidos os anos que cada versão escolheu para serem anos bissextos (ver [10]).

Quadro 2.2: Anos bissextos calendário islâmico

1° versão	2	5	7	10	13	15	18	21	24	26	29
2° versão	2	5	7	10	13	16	18	21	24	26	29
3° versão	2	5	8	10	13	16	19	21	24	27	29
4° versão	2	5	8	11	13	16	19	21	24	27	30

Considerando uma versão de cada vez, os anos bissextos são os anos em que o número do ano módulo 30 é um dos números anteriores mencionados no ciclo de 30 anos.

Exemplo 2.1. *Exemplifica-se com a segunda versão do quadro, quais são os anos bissextos no período de 30 anos de* 1.1.1051 *A. H. a* 29.12.1080 *A. H. (isto é no calendário gregoriano de* 12.04.1641 *a* 20.05.1670*).*

$$\begin{array}{lll} 1052 \equiv 2 \mod 30 & 1063 \equiv 13 \mod 30 & 1074 \equiv 24 \mod 30 \\ 1055 \equiv 5 \mod 30 & 1065 \equiv 15 \mod 30 & 1076 \equiv 26 \mod 30 \\ 1057 \equiv 7 \mod 30 & 1068 \equiv 18 \mod 30 & 1079 \equiv 29 \mod 30. \\ 1060 \equiv 10 \mod 30 & 1071 \equiv 21 \mod 30 & \end{array}$$

Capítulo 3

Calendários solares

"365 dias não são suficientes para seguir os movimentos do sol"
Jean Leford (ver [16])

Neste capítulo analisa-se a relação que existe entre o movimento do sol e o calendário solar, tendo presente a noção de ciclo solar. O estudo dos calendários solares inicia-se com o calendário juliano, onde num determinado momento da história este foi sucedido pelo calendário gregoriano. Revela-se de extrema importância referir que, atualmente, o calendário gregoriano é utilizado pela maioria dos países, incluindo Portugal, como calendário oficial, ou então como calendário para fins comerciais. Dada a importância do calendário gregoriano na sociedade, analisa-se como determinar o dia da semana de uma estipulada data, e o dia da Páscoa. Contudo, em virtude da evidente relevância dos mesmos, no presente capítulo apresenta-se outros calendários com propriedades bastante interessantes, como é o caso do calendário solar persa, do calendário Von Mädler e do calendário republicano.

3.1 Ciclo solar

O ano trópico ou também designado ano solar corresponde ao tempo decorrido entre duas passagens aparentes consecutivas do Sol pelo ponto equinocial de março. O tempo que o sol demora a dar uma volta completa à Terra, que dura 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos, isto é, 365,24219878 dias. O sistema de calendários solar descreve o tempo em função dos movimentos aparentes do sol e não é baseado nos movimentos da lua ao contrário do calendário lunar (abordado no capítulo 2). Os povos que seguiram o calendário lunar não tinham o período sazonal bem definido. Outros povos perante a necessidade de se regularem pelo período sazonal, decidiram seguir as fases da lua, sem perder de vista o movimento do sol, este é o calendário lunissolar (capítulo 4). O sistema de calendários solar tem como objetivo garantir que o início das estações do ano não se mova ao longo dos anos, para isso é adicionado um dia nos anos ditos bissextos. O calendário solar é utilizado para as atividades agrícolas que obrigam a uma disciplina estrita anual.

Vários povos seguiram o sistema de calendários solares, inicialmente observaram que um ano tem 365 dias. Com o passar dos anos, eles aperceberam-se que o ano é mais longo em algumas horas relativamente ao movimento do sol, isso colocou os povos em diferentes situações.

Dado a complexidade do ano solar, este tem 365,24219878 dias, considera-se fulcral a sua representação em fração continuada, esta é

$$[365; 4, 7, 1, 3, 5, 20, 6, 12, ...] = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + ...}}}}}}}}.$$

Para compreender a inserção de dias no ano solar, simplificou-se a fração continuada pelos primeiros termos várias vezes, obtendo-se os convergentes seguintes

$$365 \ ; \ 365 + \frac{1}{4} \ ; \ 365 + \frac{7}{29} \ ; \ 365 + \frac{8}{33} \ ; \ 365 + \frac{31}{128} \ ; \ 365 + \frac{163}{673} \ ; \ \ldots \ .$$

Cada aproximação encontrada anteriormente permite a construção do chamado ciclo. Tem-se a estrutura $365 + \frac{x}{z}$, onde x representa os dias a inserir num ciclo de z anos.

Estes convergentes são encontrados na análise dos diferentes calendários.

O calendário juliano e gregoriano são de extrema importância na história dos calendários, dado que várias vezes é feita a comparação a estes quando se apresenta datas noutros calendários. O calendário juliano foi utilizado até 1582, passando a ser o calendário gregoriano a partir de 1582, dado que existia uma diferença entre o dia considerado para o equinócio da Primavera e o dia que o ano solar indicava para equinócio da Primavera. Mesmo não sendo um calendário simples, o calendário gregoriano é utilizado atualmente pela maioria dos países como calendário oficial, ou então como calendário para fins comerciais.

Após o estudo do calendário juliano e do calendário gregoriano, analisam-se o calendário solar persa, o calendário Von Mädler e o calendário republicano. Salienta-se que o calendário solar persa ainda é utilizado em algumas sociedades, o calendário Von Mädler nunca chegou a ser aplicado, e finalmente, o calendário republicano foi abolido dada a sua complexidade e incoerência relativamente ao que os povos tinham utilizado até ao momento (ver [7, 16]).

3.2 Calendário juliano

No dia 1 de janeiro de 708 da era Romana, no ano 45 a.C., entra em vigor um novo calendário concebido sob a proteção de Júlio César. Repare-se que, este nasceu por volta do ano 100 a.C.. Aos 19 anos, quando procurava exílio, começou a sua brilhante carreira militar. Antes dos 40 anos, Júlio César foi eleito Sumo Pontífice, onde uma das principais funções foi a de regular o calendário.

Os Romanos tinham um calendário lunar (Capítulo 2) mas com o desejo de seguirem os movimentos do sol, no início eles decidiram adicionar 22 ou 23 dias todos os dois anos, até que passou a ter uma duração variável fixada pelo Sumo Pontífice. Este calendário era o calendário Pompiliano, com mais de 600 anos, e sabe-se que o mesmo se atrasava 2 horas por cada ano, isso significa um atraso de 50 dias. Quando Júlio César assumiu o cargo de Sumo Pontífice, ele foi encarregue de juntar esses dias.

Em 46 a.C., Júlio César, seguindo os conselhos do astrónomo egípcio Sosígenes de Alexandria, juntou 90 dias em vez de 27 dias. O ano 46 a.C. foi um ano muito longo com 445 dias repartidos por 15 meses, sendo por isso chamado "ano da confusão". Em 45 a.C., no dia 1 de janeiro, teve início o calendário juliano, nome atribuído em homenagem a Júlio César. Júlio César declara, ainda sobe os conselhos de Sosígenes, que o ano seria unicamente regulado com o movimento do sol (ver [17]).

Este calendário baseia-se no convergente $365 + \frac{1}{4}$, tem-se um ano de 365 dias e junta-se um dia em cada ciclo de 4 anos. Um ciclo de 4 anos, onde cada ano tem 12 meses, apresenta um total de 1461 dias. O calendário juliano tem um atraso de 0,007801 dias, isto é, 11 minutos e 14 segundos por ano, dado que o ano solar tem 365,24219878 dias, $(365{,}25 - 365{,}24219878)$. Em 128 anos, o atraso é de 1 dia. Repare-se que um século, no calendário juliano, tem 25 anos bissextos e 75 anos normais. Assim, com uma duração de pouco mais de 1600 anos, o calendário juliano teve um atraso de mais de 12 dias.

Em 44 a.C., Júlio César foi assassinado, o Sumo Pontífice encarregue de intercalar um ano bissexto a cada 4 anos, aplicou mal a regra, e inseriu um dia todos os 3 anos. Ora em 36 anos foram adicionados 12 dias, (36 : 3), em vez de 9 dias, (36 : 4). No reinado de Augusto (Caio Otávio), o filho adotivo e herdeiro de Júlio César, observou-se este erro, Augusto declarou que durante 12 anos não haveria nenhum ano bissexto e a reforma Juliana retomou o acerto. Para recompensar Augusto deste serviço o senador romano decidiu, em 746 era Romana, dedicar-lhe um mês, dando o seu nome a um mês, o mês de agosto. Já em 716 era Romana, o cônsul António tinha dedicado a Júlio César um mês, o mês de julho, uma segunda homenagem a Júlio César por ter introduzido este novo calendário.

Em 325 d.C, isto é, 370 anos após o início do calendário juliano foi observado um desacordo entre o ano deste calendário e o ano solar, dado que se começou a ver o deslocamento do equinócio da Primavera, antes do dia 25 de março e após todos estes anos era visível no dia 21 de março. Para remediar a situação, o dia 21 de março foi decretado pela igreja católica como o primeiro dia da Primavera (ver [7, 9, 16]).

No entanto, esta mudança não resolveu o problema do atraso, e no início do século XVI, o ano solar e o calendário juliano tinham uma diferença de 10 dias. Dadas as circunstâncias e para resolver esse problema, foi introduzido o calendário gregoriano.

O calendário gregoriano é o tema da secção 3.3.

Cada ciclo de 4 anos tem três anos normais de 365 dias e um ano bissexto de 366 dias. O dia suplementar foi colocado no fim do mês de fevereiro. Os meses foram distribuídos de maneira diferente, isto é, 4 meses de 30 dias, 7 meses de 31 dias e 1 mês de 28 dias. No ano bissexto o mês de 28 dias tem 29 dias. A repartição obtida não foi das mais simples como se pode ver em seguida

$$\frac{365}{12} = 30 + \frac{7}{12} - \frac{2}{12}\,.$$

3.3 Calendário gregoriano

Em 1582, o papa Gregório XIII reformulou o calendário de maneira a reduzir a diferença de 10 dias que existia entre o ano solar e o calendário juliano. O papa Gregório, foi eleito em 1572, e foi o mesmo que impôs a reforma do calendário juliano (ver [17]).

Como aconteceu nas outras reformas, o essencial dos cálculos era feito pela comissão de sábios entre eles o sábio Clavius, astrónomo e matemático alemão.

Tendo por base os convergentes encontrados para o ano solar, escolhe-se aquele que tem o denominador mais próximo de 100. Considera-se o convergente $365+\frac{8}{33}$, um ano tem 365 dias, e num ciclo de 33 anos adiciona-se 8 dias, sendo assim, existem 8 anos bissextos e 25 anos normais. O ano corresponde a

$$\begin{aligned}\frac{365 \times 25 + 366 \times 8}{33} &= \frac{12053}{33}\\ &= 365{,}242424 \quad \text{dias.}\end{aligned}$$

Neste caso, o ano gregoriano esta atrasado 19 segundos relativamente ao ano solar.

A reforma gregoriana não ficou por aqui, a partir do convergente $365 + \frac{8}{33}$, analisa-se o que se passa quando o denominador se aproxima de 100, um século. Neste sentido, o ciclo de 33 anos foi transformado num ciclo de 99 anos, para isso multiplicou-se o numerador e o denominador por 3, e obteve-se assim $365 + \frac{24}{99}$. Neste caso, existem 24 anos bissextos em 99 anos. Verifica-se que o calendário gregoriano está adiantado um dia relativamente ao calendário juliano. Num século, neste calendário existem 24 anos bissextos, e no calendário juliano tem-se 25 anos bissextos (ver [16]).

Para uma melhor aproximação do ano solar, calcula-se o número de anos bissextos em 4 séculos, isto é, em 400 anos. Neste período de tempo, tendo como base um ciclo de 99 anos, têm-se 4 ciclos de 99 anos e um ciclo de 4 anos, $400 = 99 \times 4 + 4$. Pelo que foi analisado anteriormente em 4 ciclos de 99 anos tem-se $4 \times 24 = 96$ anos bissextos e em 4 anos existe 1 ano bissexto $(4 : 4 = 1)$. Tem-se um total de 97 anos bissextos (ver [16]).

$$\begin{aligned}\frac{365 \times 303 + 366 \times 97}{400} &= \frac{146097}{400} \\ &= 365{,}2425 \quad \text{dias.}\end{aligned}$$

O ano gregoriano tem um atraso de $3{,}0122 \times 10^{-4}$, $(365{,}2425 - 365{,}24219878)$, este atraso corresponde a 26 segundos, por ano.

Atualmente, o calendário gregoriano tem um atraso de 3 horas relativamente ao ano solar, $(3{,}0122 \times 10^{-4}) \times (2016 - 1582) = 0{,}13072948$ dias.

Em 4700, o atraso será de 1 dia, o calendário gregoriano terá um dia a mais relativamente ao ano solar. Existem algumas propostas para remediar este caso, no entanto, até a data, não existe nenhuma proposta criada que seja válida ou aceite pela comunidade cientifica.

No calendário gregoriano como já acontecia no calendário juliano, os anos comuns têm 365 dias e dos anos bissextos têm 366 dias. Como acontecia no calendário juliano, o ano é bissexto quando é um ano divisível por 4. A exceção no calendário gregoriano é que se o ano for divisível por 100 e não for por 400 este não é bissexto. Como se pode constatar, o ano 1700, não é bissexto, pois sendo um ano divisível por 100, não é um ano divisível por 400. No entanto, o ano 2000 foi um ano bissexto, já que apesar de ser um ano divisível por 100, também é divisível por 400.

O ano gregoriano é dado por

$$\begin{aligned}365{,}2425 &= 365 + \frac{97}{400} \\ &= 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}\,.\end{aligned}$$

Atualmente, a calendário gregoriano é utilizado em quase todo o planeta Terra, este calendário é uma versão ligeiramente modificada do calendário juliano. Salienta-se que diferentes países aderiram ao presente calendário em momentos distintos na história da humanidade. Deste modo, o período compreendido entre os séculos XVI a XX, deve ser analisado com muita prudência e cautela. Esta prudência deve ser tida em conta em dois aspectos, sendo estes: i) situar o tipo de calendário ; ii) o país.

Para salientar a prudência que deve ser tida neste tipo de análise, repare-se nos seguintes casos : Cervantes – escritor espanhol ; e Shakespeare – dramaturgo, poeta e ator inglês. Considere-se, assim, a seguinte questão: *Qual deles morreu primeiro?, sabendo que ambos morreram no dia 23 de abril de 1616.* [1] (ver [15]).

Ora antes de se responder a uma questão deste género é preciso identificar o calendário que o país utilizava na altura. Portugal, Espanha, França e suas colónias, Itália, Países Baixos católicos, Sabóia e Luxemburgo aderiram ao calendário gregoriano em 1582. No entanto, a Grã-Bretanha e suas colónias só aderiram em 1752.

A resposta à questão colocada anteriormente é que Cervantes morreu 10 dias antes de Shakespeare.

3.3.1 O dia da semana

Considera-se interessante saber em que dia da semana um determinado evento aconteceu. Já que se pode querer determinar o dia da semana do nascimento, ou até mesmo o dia da semana de um evento muito importante, como é o caso do dia 25 de abril de 1974. Para determinar o dia da semana podem ser utilizados diferentes métodos. Na presente dissertação utilizam-se dois métodos, nomeadamente o calendário perpétuo, e a fórmula de Zeller.

O calendário perpétuo consiste em memorizar dois quadros, um que corresponde ao mês e outro que corresponde a uma transformação do "século", os dois primeiros algarismos do ano, para se calcular o dia da semana mentalmente. Na fórmula de Zeller calcula-se uma expressão e procura-se o resto da divisão dessa expressão por 7.

[1] Apesar de se ter acreditado durante anos que Cervantes e Shakespeare morreram no mesmo dia, sabe-se que na realidade isso não aconteceu. Na verdade, Cervantes morreu no dia 22 de abril de 1616. No ano 1995, o dia 23 de abril passou a ser o Dia Internacional do Livro.

O calendário perpétuo

O objetivo do calendário perpétuo é o de converter uma data (dia, mês, ano) num algarismo para poder determinar o dia da semana. Para isso é necessário conhecer os algarismos do dia (D), do mês (M), do ano (A) e do "século"(S). Para a determinação desses algarismos, deve seguir-se os quatro passos citados em seguida.

1. **Determinar o algarismo D?**
   Calcular o resto da divisão do dia do mês por 7. O resto é o algarismo D.

2. **Determinar o algarismo M?**
   Este processo exige a consulta do quadro 3.1.

Quadro 3.1: Algarismo correspondente ao mês

Meses	jan	fev	mar	abr	maio	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
Ano comum	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
Ano bissexto	6	2										

   O número associado ao mês é o algarismo M.

3. **Determinar o algarismo A?**
   Primeiro passo: Escolher os dois últimos algarismos do ano, e calcular o resto da divisão desse valor por 28. Guarda-se o número encontrado. (Um ciclo repete-se de maneira idêntica todos os 28 anos.)
   Segundo passo: Calcular o número de anos bissextos existentes no resultado obtido no primeiro passo. Guarda-se esse número.
   Terceiro passo: Adicionar os resultados obtidos no primeiro e no segundo passo. Determinar o resto da divisão por 7.

   O resultado é o algarismo A.

4. **Determinar o algarismo S?**
   Atenção! Escolher o calendário juliano ou o calendário gregoriano.
   Sabendo que o último dia do calendário juliano foi no dia 5 de outubro de 1582 e o primeiro dia do calendário gregoriano foi no dia 15 de outubro de 1582. Não é portanto possível determinar o dia da semana entre o 6 e o 14 de outubro de 1582.

No calendário juliano para datas antes do dia 5 de outubro 1582, escolhe-se o número de "séculos"(os dois primeiros algarismos do ano), e calcula-se o resto da divisão por 7.
O resultado obtido é convertido através do quadro 3.2.

Quadro 3.2: Converter resultado obtido no calendário juliano

0	transforma-se em	4	4	transforma-se em	0
1	transforma-se em	3	3	transforma-se em	1
2	transforma-se em	2			
5	transforma-se em	6	6	transforma-se em	5

No calendário gregoriano para datas a partir de 15 de outubro de 1582, escolhe-se o número de "séculos"(os dois primeiros algarismos do ano), e calcula-se o resto da divisão por 4.

O resultado obtido é convertido através do quadro 3.3.

Quadro 3.3: Converter resultado obtido no calendário gregoriano

0	transforma-se em	6
1	transforma-se em	4
2	transforma-se em	2
3	transforma-se em	0

O valor encontrado é o o algarismo S.

5. **Determinar o dia da semana?**
Adiciona-se os algarismos obtidos, o total é D + M + A + S.
Determina-se o resto da divisão dessa adição por 7.
Consultar o quadro 3.4, pois o algarismo obtido corresponde a um dia da semana.

Quadro 3.4: Dia da semana – Calendário Perpétuo

Domingo	segunda-feira	terça-feira	quarta-feira	quinta-feira	sexta-feira	sábado
0	1	2	3	4	5	6

Através dos passos enunciados anteriormente, obtém-se o dia da semana da data desejada (ver [8]).

O exemplo seguinte calcula o dia da semana com este método.

Exemplo 3.1. *Em que dia da semana se deu a revolução do 25 de abril de 1974?*

- **Determinar o algarismo D?**
  Tem-se que $25 \equiv 4 \mod 7$. O algarismo D é 4.

- **Determinar o algarismo M?**
  Ao consultar o quadro 3.1 o algarismo M é 6.

- **Determinar o algarismo A?**
  Primeiro passo: Tem-se $74 \equiv 18 \mod 28$.
  Segundo passo: Em 18 anos, existem 4 anos bissextos, $(\frac{18}{4} = 4,5)$.
  Terceiro passo: Tem-se $18 + 4 = 22$ e $22 \equiv 1 \mod 7$.
  O algarismo A é 1.

- **Determinar o algarismo S?**
  Em 1974, o calendário gregoriano já era aplicado.
  Tem-se $19 \equiv 3 \mod 4$.
  O resultado obtido é convertido através do quadro 3.3, deste modo o 3 corresponde ao 0.
  O algarismo S é 0.

- **Determinar o dia da semana?**
  Adiciona-se os algarismos obtidos, o total é $4 + 6 + 1 + 0 = 11$.
  Tem-se $11 \equiv 4 \mod 7$.
  Ao consultar quadro 3.4, o algarismo 4 corresponde a uma quinta-feira.

Conclui-se que o dia 25 de abril de 1974 foi a uma quinta-feira.

A fórmula de Zeller

A fórmula de Zeller, baseada no calendário gregoriano, determina o dia da semana de uma determinada data.

Para completar a fórmula de Zeller é necessário ter o d, o m, o a e o s. O d é o dia do mês. O m é a posição do mês, dado que o mês de fevereiro é instável com 28 ou 29 dias, a contagem é feita com início em março, sendo este o número 3, e terminando assim em fevereiro com o número 14. O a corresponde aos dois últimos algarismos do ano. E finalmente, o s ao "século"[2], os dois primeiros algarismos do ano.

Para determinar o dia da semana calcula-se o resto da divisão por 7, onde $\lfloor ... \rfloor$ designa a parte inteira do número (ver [9]).

A fórmula de Zeller é dada por

$$\left(d + \left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor + a + \left\lfloor \frac{a}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor - 2s \right) \mod 7 \, .$$

Calcula-se a expressão entre parênteses e de seguida calcula-se o resto da divisão do valor encontrado por 7. Este resto corresponde a um dia da semana, os dias da semana são identificados pelos números de 0 a 6, dado que a semana tem 7 dias, consulta-se o quadro 3.5 para saber o dia da semana.

Quadro 3.5: Dia da semana – Fórmula de Zeller

Domingo	segunda-feira	terça-feira	quarta-feira	quinta-feira	sexta-feira	sábado
1	2	3	4	5	6	0

A fórmula de Zeller utiliza diferentes noções, os pontos seguintes explicam cada um dos termos desta fórmula e a contribuição dos mesmo para encontrar o dia da semana. Sabe-se que o módulo da soma é igual à soma dos módulos,

$$a \equiv c \mod m \text{ e } b \equiv d \mod m \text{ então } a + b \equiv c + d \mod m$$

portanto esta análise pode ser feita individualmente.

Tem-se as seguintes situações:

- Se o dia do mês aumentar uma unidade, o dia da semana também aumenta uma unidade. Portanto tem-se d na fórmula.
- Um ano comum tem 365 dias, como $365 \equiv 1 \mod 7$, se o ano aumentar uma unidade, o dia da semana também aumenta uma unidade. Portanto, tem-se a na fórmula.
- Os anos bissextos têm 366 dias, onde $366 \equiv 2 \mod 7$. Estes têm um dia a mais que os anos comuns, como os anos bissextos são de 4 em 4 anos, tem-se $\frac{a}{4}$ na fórmula.

[2]Lembre-se que, por exemplo 1930 está no século XX. O século XX começou no dia 1 de janeiro de 1901 e terminou no dia 31 de dezembro de 2000.

- Em 100 anos, existem 76 anos comuns e 24 anos bissextos. Portanto, em 100 anos o dia da semana irá aumentar $76 \times 1 + 24 \times 2 = 124$ dias.
  Como $124 \equiv -2 \mod 7$, na fórmula tem-se $-2s$, porque quando o século aumenta uma unidade, o dia da semana diminui duas unidades.

- A cada 400 anos, adiciona-se mais um dia, na fórmula de Zeller o termo $\frac{s}{4}$, representa esta adição.

- Para compreender a influência dos meses, construiu-se o quadro 3.6. Na identificação dos meses por números, começa-se no mês de março, sendo este o número 3 e termina-se no mês de fevereiro. Como o mês de fevereiro é instável, com 28 ou 29 dias, coloca-se no fim.

Quadro 3.6: Análise dos meses

Meses	mar	abr	maio	jun	jul	ago	set	out	nov	dez	jan	fev
m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
dias (d)	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	28
d mod 7	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3	3	0
$\left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor$	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39
d a mais	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

No quadro 3.6, calcular-se o número de dias módulo 7, para determinar quantos dias não formam uma semana completa. Por exemplo, o mês de março tem 31 dias, uma semana completa tem 7 dias, então o mês de março tem $31 = 7 \times 4 + 3$, isto é, existem 3 dias a mais neste mês que são adicionados ao mês seguinte para completar uma semana. Assim, à exceção do mês de fevereiro, todos os outros meses têm entre 2 ou 3 dias a mais. Ao aplicar o termo $\left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor$, isto é, adiciona--se 1 ao mês, multiplica-se por $\frac{26}{10}$ e conserva-se a parte inteira do resultado, o mês de março corresponde ao 10, o mês de abril ao 13, etc. Assim, começando no dia 1 de março, o mês de abril tem 3 dias da semana a mais, daí o facto de se obter 13. Abril tem 2 dias da semana a mais, o mês de maio tem mais 5 dias que o mês de março, isto é, ele tem 15 dias. Continuado o mesmo raciocínio verifica-se que o mês de fevereiro tem 29 dias a mais que o mês de março.

Deste modo, mostra-se a influência de cada termo da fórmula de Zeller para encontrar o dia de uma determinada data.

O exemplo seguinte aplica a fórmula de Zeller.

Exemplo 3.2. *A Implantação da República foi no dia 5 de outubro de 1910, calcula-se o dia da semana correspondente.*

Neste caso, $d = 5$, $m = 10$, $a = 10$ e $s = 19$ tem-se

$$\begin{aligned}\left(5 + \left\lfloor \frac{(10+1)26}{10} \right\rfloor + 10 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{4} \right\rfloor - 2 \times 19\right) &\mod 7\\ (5 + 28 + 10 + 2 + 4 - 38) &\mod 7\\ 11 &\mod 7\\ 4 &\mod 7\,.\end{aligned}$$

A Implantação da República foi numa quarta-feira.

3.3.2 O dia da Páscoa

Neste ponto, explica-se o algoritmo de Gauss que permite calcular o dia da Páscoa no calendário gregoriano, isto é, a partir de 15 de outubro de 1582. Em agosto de 1800, Gauss publicou um algoritmo para determinar o dia da Páscoa para qualquer ano dado. Esta fórmula chama-se *Osterformel* ("A fórmula da Páscoa") (ver [3, 28]).

O dia da Páscoa é o primeiro domingo após a primeira lua cheia depois do equinócio da Primavera (21 de março). Neste sentido a Páscoa é um evento relacionado com os ciclos lunar e solar. O sistema de calendários lunissolares (capítulo 4) também relaciona estes dois ciclos.

Seja A um ano escolhido para a determinação do dia da Páscoa. Cinco etapas devem ser seguidas, e em cada etapa encontra-se um valor a conservar.

Algoritmo de Gauss

1. $a = A \mod 19$
2. $b = A \mod 4$
3. $c = A \mod 7$
4. $d = (19a + M) \mod 30$ onde M é dado por [3]

$$M = \begin{cases} 23 & \text{se } 1700 \leq A \leq 1899 \\ 24 & \text{se } 1900 \leq A \leq 2199. \end{cases}$$

[3] Entre 1700 e 2199. Para outros anos, utiliza-se a fórmula de M, apresentada em seguida.

Se $d = 29$ então substitui-se d por $d - 1$.
Se $d = 28$ e $a > 10$ então substitui-se d por $d - 1$.

5. $e = (2b + 4c + 6d + N) \mod 7$ onde N é dado por [4]

$$N = \begin{cases} 3 & \text{se } 1700 \leq A \leq 1799 \\ 4 & \text{se } 1800 \leq A \leq 1899 \\ 5 & \text{se } 1900 \leq A \leq 2099 \\ 6 & \text{se } 2100 \leq A \leq 2199. \end{cases}$$

A Páscoa é no dia $22 + d + e$ de março ou no dia $d + e - 9$ de abril (ver [3]).

Para compreender o algoritmo de Gauss, en seguida explica-se cada uma das etapas (ver [3, 28]).

- O valor de a está relacionado com o desvio que o ano tem relativamente à lua. Sabe-se que 235 meses lunares correspondem praticamente a 19 anos solares, ciclo metónico (subsecção 4.2.5). As fases da lua repetem-se no "mesmo" dia a cada 19 anos solares. Assim, calcula-se o ano módulo 19.

- O b conta os anos bissextos, dado que um ano bissexto tem mais dois dias da semana, $366 \mod 4 = 2 \mod 4$.

- O valor de c representa o dia da semana, sabe-se que um ano tem $365 \mod 7 = 1 \mod 7$, isto é, o dia da semana de um ano ao outro desloca-se uma unidade, por exemplo se o dia 1 de janeiro é a uma segunda-feira, no ano seguinte será a uma terça-feira.

- O quarto e o último valores a determinar, d e e, recorrem a dois valores M e N.

  Para calcular esses valores, definem-se P, Q e R onde

$$P = \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor, \quad Q = \left\lfloor \frac{3P+3}{4} \right\rfloor, \quad R = \left\lfloor \frac{8P+13}{25} \right\rfloor .$$

  ▷ O P considera os primeiros dois algarismos do ano, estando estes dois algarismos relacionados com a determinação do século [5].

[4] Entre 1700 e 2199. Para outros anos, utiliza-se a fórmula de N, apresentada em seguida.
[5] Observa-se que P não se refere ao século, por exemplo, no ano 1930 tem-se $P = 19$ mas o ano 1930 está no século XX.

▷ No caso do Q, sabe-se que em cada 400 anos só 3 dos anos centenários são bissextos, tem-se $\frac{3P}{4}$ adicionado de $\frac{3}{4}$, este último valor permite o ajustamento.
O R tem a ver com a mudança no ciclo metónico, isto corresponde a 8 dias em 25 séculos.

▷ O M permite regularizar o facto de 235 meses lunares não serem exatamente igual a 19 anos solares. Isto porque existe uma diferença de um dia em 310 anos, isto é 8 dias em 25 séculos. Assim, tem-se

$$M = (15 + Q - R) \mod 30 .$$

▷ O N está relacionado com a diferença de anos bissextos que existe entre o calendário juliano e o calendário gregoriano, como analisado na secção 3.3, se o ano é divisível por 100 e não é por 400, então não é um ano bissexto. Assim, tem-se

$$N = (4 + Q) \mod 7 .$$

Como os resultados de M e N são os mesmos durante muitos anos, no algoritmo apresenta-se os valores calculados entre 1700 e 2199.

Neste sentido, o valor de d usa o ciclo metónico através do valor a, a mudança a longo termo, M, assim como o comprimento do mês lunar.
O d é $19a + M \mod 30$.

O valor de e permite encontrar o valor correto para trazer o primeiro domingo após o dia 22 de março.
Assim, e é $2b + 4c + 6d + N \mod 7$.

Apresenta-se, em seguida, alguns exemplos com a aplicação do Algoritmo de Gauss.

Exemplo 3.3. *Calcular o dia da Páscoa em 2017?*

- $a = 2017 \mod 19 = 3$
- $b = 2017 \mod 4 = 1$
- $c = 2017 \mod 7 = 1$
- $d = (19 \times 3 + 24) \mod 30 = 21$

- $e = (2 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 21 + 5) \mod 7 = 4$

Observa-se que $22 + 21 + 4 = 47$ de março é impossível.
Então tem-se que $21 + 4 - 9 = 16$ de abril .

A Páscoa é no dia 16 de abril de 2017.

Exemplo 3.4. *Calcular o dia da Páscoa em 1981?*

- $a = 1981 \mod 19 = 5$
- $b = 1981 \mod 4 = 1$
- $c = 1981 \mod 7 = 0$
- $d = (19 \times 5 + 24) \mod 30 = 29$
  Como $d = 29$, este é substituído por 28.
- $e = (2 \times 1 + 4 \times 0 + 6 \times 28 + 5) \mod 7 = 0$

Observa-se que $22 + 28 + 0 = 50$ de março é impossível.
Então tem-se que $28 + 0 - 9 = 19$ de abril.

A Páscoa é no dia 19 de abril de 1981.

Exemplo 3.5. *Calcular o dia da Páscoa em 1954?*

- $a = 1954 \mod 19 = 16$
- $b = 1954 \mod 4 = 2$
- $c = 1954 \mod 7 = 1$
- $d = (19 \times 16 + 24) \mod 30 = 28$
  Como $d = 28$ e $a = 16 > 10$, este é substituído por 27.
- $e = (2 \times 2 + 4 \times 1 + 6 \times 27 + 5) \mod 7 = 0$

Observa-se que $22 + 27 + 0 = 49$ de março é impossível.
Então tem-se que $27 + 0 - 9 = 18$ de abril.

A Páscoa é no dia 18 de abril de 1954.

3.4 Calendário solar persa

O calendário solar persa teve o mesmo início que o calendário islâmico. O primeiro ano, 1 A.P. (ano persa) começou no equinócio da Primavera no ano 622 do calendário juliano, quando Maomé saiu de Meca para se refugiar em Medina. Apesar de terem o mesmo início, os dois calendários não estão relacionados. No século XI, um grupo de astrónomos criou o calendário solar persa, no entanto, foram feitas várias alterações. No Irão, o calendário persa é utilizado desde 1925 e no Afeganistão desde 1957.

O calendário solar persa tem 12 meses que correspondem a 365 dias nos anos normais e a 366 dias nos anos bissextos. Neste calendário os meses podem ter 29, 30 ou 31 dias. Existem seis meses seguidos de 31 dias, depois cinco meses seguidos de 30 dias e por último um mês de 29 dias (ano normal) ou 30 dias (ano bissexto).

Este calendário é baseado num período de 2820 anos (ver [24]). No ano 475 A.P. (em 1097 do calendário juliano) começou o período de 2820 anos. Neste período existem 88 ciclos, onde 22 dos 88 ciclos têm 29 anos, 65 dos 88 ciclos têm 33 anos e 1 dos 88 ciclos tem 37 anos. Isto é,

$$22 \times 29 + 65 \times 33 + 1 \times 37 = 2820 \ .$$

A tipologia é a seguinte

$$29, 33, 33, 33, 29, 33, 33, 33, 29, ..., 33, 33, 37 \ .$$

Os anos bissextos, como no calendário juliano, são de 4 em 4 anos. Tendo como base os convergentes encontrados para o ano solar, tem-se que em 29 anos existem 7 anos bissextos, isto é, o convergente $365+\frac{7}{29}$. Em 33 anos existem 8 anos bissextos, observa-se o convergente $365+\frac{8}{33}$ e em 37 anos existem 9 anos bissextos. Existe um total de 683 anos bissextos $(22 \times 7 + 65 \times 8 + 1 \times 9)$ em 2820 anos. Tem-se um ano solar de

$$365 + \frac{683}{2820} = 365{,}2422 \quad \text{dias.}$$

O ano solar persa tem um atraso de $1{,}22 \times 10^{-6}$, $(365{,}2422 - 365{,}24219878)$, o atraso corresponde a 0,1 segundos. O ano no calendário persa é muito mais próximo do ano solar que o ano no calendário gregoriano (ver [24, 9]).

3.5 Calendário Von Mädler

Johann Heinrich Von Mädler era um astrónomo e matemático alemão. Von Mädler, apesar de não ser muito conhecido, realizou cálculos importantes para encontrar o verdadeiro valor do ano solar. Até a sua descoberta esta precisão nunca tinha sido alcançada.

Na altura em que a Rússia ainda usava o calendário juliano, Von Mädler propôs um convergente como reforma para que o calendário juliano se aproximasse do ano solar, mas não foi aceite. A sua ideia era de, como aconteceu no calendário gregoriano, suprimir 10 dias, mas com a nova regra de 128 anos (ver [18]).

Von Mädler utilizou o convergente $365 + \frac{31}{128}$, isto é, o ano tem 365 dias e num ciclo de 128 anos são adicionados 31 dias. No calendário juliano em 128 anos são adicionados 32 dias. No calendário gregoriano, podem ser adicionados 32 ou 31 dias, dependendo se se passa por um ano que é múltiplo de 400 ou não (note-se que passa-se sempre por um ano que é múltiplo de 100). No caso do calendário proposto por Van Mädler, o ano tem 365,2421875 dias, isto é, 365 dias 5 horas 48 min 45 segundos. Um adiantamento de $1{,}128 \times 10^{-5}$ dias, $(365{,}2421875 - 365{,}24219878)$ que corresponde a 1 segundo. O erro de um segundo por ano, provoca um adiantamento de um dia em 100'000 anos.

3.6 Calendário republicano

Em 1792, a Convenção Nacional Francesa, com o desejo intuito de cortar completamente a ligação da igreja e do estado, construiu o calendário republicano. O calendário republicano foi criado pela comissão de direção da política de Charles-Gilbert Romme apoiado por Claude Joseph Ferry e Charles-François Dupuis. Estes tiveram o apoio de um químico, um matemático, diversos astrónomos e um poeta. O calendário republicano foi apresentado à Convenção Nacional no dia 23 de setembro 1793, sendo o mesmo adotado cerca de um mês depois, no dia 24 de outubro de 1793. Este calendário foi utilizado do dia 22 de setembro de 1792 a 31 de dezembro de 1805.

O tipo de formato utilizado para escrever os anos foi numeração romana, e o ano não começava no dia 1 de janeiro mas no equinócio de outono, no dia 22 de setembro. Os meses mudaram de nome, sendo o nome destes associado às preocupações das atividades agrícolas da França na referida época. Todos esses nomes foram imaginados por Fabre d'Eglantine (1750-1794), o poeta.

O ano tinha 365 ou 366 dias. Um ano era composto de 12 meses, e cada mês tinha 30 dias, os 5 dias que faltam eram adicionados no final do ano. Como o calendário republicano é um calendário solar, a cada 4 anos adicionava-se mais um dia. Assim os anos bissextos, 366 dias, foram os anos III, VIII e XI. Os dias extra (5 ou 6) eram dias de festa.

Cada mês era dividido em 3 décadas, isto é, as semanas de 7 dias desapareceram para serem substituídas por grupos de 10 dias, as décadas. As horas e os minutos também utilizavam o sistema decimal, assim um dia tinha 10 "horas decimais", cada hora tinha 100 "minutos decimais", cada um dividido em 100 "segundos decimais". No entanto, esta maneira de medir o tempo desapareceu rapidamente pois, existiram muitas dificuldade para criar relógios que pudessem medir este tipo de tempo. O desaparecimento deste sistema foi no dia 7 de abril 1795, data do calendário gregoriano.

Um dia solar médio tem $86'400$ segundos e o dia no calendário republicano tem $100'000$ "segundos decimais", assim 1 "segundo decimal" republicano demora 0,864 segundos. Portanto uma "hora decimal" republicana demora 8'640 segundos, como um segundo tem 60 minutos, uma "hora decimal" tem $\frac{8'640}{60} = 144$ minutos. Este sistema faz lembrar uma unidade de medida de ângulos, o grado, onde 100 grados corresponde a 90 graus.

A França pretendia que este calendário se transformasse num calendário universal, porém o mesmo baseava-se nos acontecimentos nacionais. Isto representou o primeiro entrave na tentativa de universalidade. Para além do presente problema, acrescenta-se ainda outros obstáculos, sendo de destacar o dia de repouso, este era só ao décimo dia. O mais complicado de todos os obstáculos, esteve ligado ao facto de o calendário gregoriano já ser considerado um calendário universal. Dadas tais circunstâncias, e considerando que o povo francês já estava muito habituado ao calendário gregoriano e não desejava adaptar-se a outro, em 1805, Napoleão I anulou o calendário republicano. Dados os factos mencionados anteriormente, conclui-se que o calendário republicano apenas durou 13 anos. O calendário gregoriano retomou no dia 1 de janeiro de 1806 (ver [16, 9]).

Capítulo 4

Calendários lunissolares

"Seguir a lua sem perder o sol"
Jean Leford (ver [16])

Neste capítulo descreve-se a ligação entre dois fenómenos naturais, o mês lunar e o ano solar, que possibilitaram a construção e desenvolvimento dos calendários lunissolares A influência da localização geográfica, histórica, e de determinados aspetos religiosos foram algumas das caraterísticas que levaram ao aparecimento de um elevado número de ciclos associados a este sistema de calendários. Como se pode ver no decorrer do presente capítulo, cada um destes ciclos tem associado diferentes erros, que permitem diferentes afastamentos ao ano lunar e solar. De evidenciar que ao longo da história foram criados e desenvolvidos diversos calendários baseados nos dois fenómenos referidos anteriormente. Para a presente dissertação aborda-se detalhadamente o calendário grego e o calendário hebreu.

4.1 Conceitos Fundamentais

Considera-se que a eleição do tipo de calendário é influenciada pelo clima e pelo modo de vida das diferentes sociedades. Repare-se que o calendário solar foi adotado pelo povo egípcio, desde 4235 a.C., visto que, no Egito, a agricultura tinha uma grande influência no modo de vida da população. Adicionando a este motivo as repetidas tempestades do Nilo, que afetavam não só essa mesma agricultura como o comportamento do povo egípcio, pode entender-se o porquê da adoção deste tipo de calendários.

Não obstante, no século VII, na Arábia, a ausência de estações do ano bem definidas e o estilo de vida nómada dos árabes contribuíram para a preservação do calendário lunar.

A junção destes dois mundos, ou seja, o nomadismo de algumas sociedades e o desenvolvimento da agricultura como forma de vida de outras, proporcionou o surgimento do sistema de calendários lunissolares. Este tenta combinar dois elementos importantes, a lua e as estações do ano. Assim sendo, pode afirmar-se que no mesmo calendário é possível ver as fases da lua associadas às diferentes estações do ano.

Inicialmente, a transição do calendário lunar para o calendário lunissolar realizou-se via observação, ou seja, considerou-se um ano, z, escolheu-se um mês, y, numa estação do ano, w. Note-se que, no ano seguinte $z + 1$, o mesmo mês y tem que coincidir com a mesma estação do ano w. Se tal não acontecer e se a estação do ano w for observada com um atraso significativo que não possa ser ignorado relativamente a este mês y, deve acrescentar-se mais um mês a esse ano. Esta mesma observação foi feita durante vários anos, permitindo assim a construção e aceitação do calendário lunissolar.

Porém, aquando do desenvolvimento do presente calendário surgiu um conjunto de dificuldades, dado que foi preciso intercalar meses inteiros. Talvez seja por isso que existe uma grande diversidade de calendários lunissolar. Para compreender a elaboração do presente calendário é preciso conhecer a relação do mês lunar com o ano trópico.

De acordo com o sistema de calendários lunar, o período decorrido entre duas luas novas sucessivas, mês lunar, é de 29,530589 dias. Sabe-se que um ano lunar tem 12 meses lunares, portanto 354,367068 dias, como já mencionado no capítulo 2. O ano solar corresponde ao tempo decorrido entre duas passagens aparentes consecutivas do Sol pelo ponto equinocial de março. A duração do ano solar é de 365,24219878 dias, referido no capítulo 3. Observa-se que o ano trópico é mais longo que o ano lunar (isto é 12 meses lunares), sendo esta duração de quase 11 dias a mais (365,242199 =

$12 \times 29{,}530589 + 10{,}875131$). O mês a adicionar tem 30 dias, como faltam 11 dias ao ano lunar para estar de acordo com o ano solar, em 3 anos existe um adiantamento de um mês e uns dias, ($10{,}875131 \times 3 = 32{,}6225393$). Posto isto, a inserção de um mês é recomendada. No entanto, a inserção de um mês a cada 3 anos, pode representar um erro. Por conseguinte, neste capítulo, pretende estudar-se não só quando se deve inserir esse mês, mas também entender como o mês lunar e o ano solar serão afetados.

Para entender o primeiro aspeto – saber quando inserir o mês ou os meses – deve dividir-se o ano solar pelo mês lunar. Através desta divisão encontra-se o número de meses que o ano lunissolar deve ter. Contudo, pode constatar-se que o resultado apresentado não tem um número exato de meses.

$$\begin{aligned} m &= \frac{365{,}242199}{29{,}530589} \\ &= 12{,}368267\ . \end{aligned}$$

A parte decimal corresponde a quase 11 dias, como visto anteriormente. Como exposto no capítulo 2, o calendário lunar tem 12 meses. Sabendo que faltam 11 dias para que o ano lunar se aproxime do ano solar, em 3 anos tem-se mais de 30 dias. Isto é, em 3 anos o calendário lunar tem um mês a menos que o calendário solar. Posto isto, a questão pertinente é saber quando e onde introduzir este mês. Esta análise pode ser compreendida através da aplicação das frações continuadas. Considera-se fulcral expor a representação da fração continuada da divisão anteriormente citada, assim, a fração continuada é:

$$m = [12; 2, 1, 2, 1, 1, 17, ...] = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + ...}}}}}}\ .$$

Para perceber como é que os meses são introduzidos num determinado ciclo, simplificou--se várias vezes a fração continuada pelos primeiros termos, e obteve-se os seguintes convergentes:

$$12\ ;\ 12 + \frac{1}{2}\ ;\ 12 + \frac{1}{3}\ ;\ 12 + \frac{3}{8}\ ;\ 12 + \frac{4}{11}\ ;\ 12 + \frac{7}{19}\ ;\ 12 + \frac{67}{189}\ ;\ ...\ .$$

Cada aproximação encontrada anteriormente permite a construção do chamado ciclo. Tem-se a estrutura $12 + \frac{y}{z}$, onde y representa os meses a inserir num ciclo de z anos.

Assim, no calendário lunissolar encontram-se dois tipos de anos, os anos normais com 12 meses e os anos embolismais com 13 meses. O termo embolismal designa o mês que os Atenienses intercalavam no ano para ajustar o ano lunar ao ano solar, este termo é também utilizado num ano que tem 13 lunações. Os meses têm o mesmo número de dias que no calendário lunar, ou seja, os meses ímpares têm 30 dias e os meses pares 29 dias.

O presente capítulo está dividido em duas secções, a primeira é dedicado à análise dos ciclos, onde se pretende explicar como é possível resolver o problema da ausência de dias, e para tal analisam-se os convergentes da divisão do ano solar pelo mês lunar. A segunda secção está intimamente relacionada com o estudo dos diferentes ciclos, aqui pretende-se enquadrar os calendários lunissolares que existiram e/ou que ainda existem. Para facilitar a compreensão dos ciclos lunissolares, pouca ou nenhuma referência dos calendários lunissolares é feita na análise do ciclo.

4.2 Os diferentes tipos de ciclo

Os ciclos são construídos com base nos convergentes encontrados anteriormente, e que são, novamente, apresentados abaixo.

$$12\ ;\ 12+\frac{1}{2}\ ;\ 12+\frac{1}{3}\ ;\ 12+\frac{3}{8}\ ;\ 12+\frac{4}{11}\ ;\ 12+\frac{7}{19}\ ;\ 12+\frac{67}{189}\ ;\ .....$$

Como referido anteriormente, em todos os convergentes encontradas existem sempre 12 meses mais uma fração. Esta fração permite analisar a relação entre o(s) mês(es), x, a inserir em cada ciclo de y anos, o(s) mês(es) é(são) dado(s) pelo numerador e o ciclo de anos é dado pelo denominador. Assim, o primeiro convergente não será analisado, dado que o mesmo tem 12 meses e como tal representa exatamente o ano lunar.

Diferentes sábios, matemáticos e astrónomos basearam o sistema de calendários lunissolar no mês lunar. Contudo perante o ciclo do sol, viram-se obrigados a encontrar uma forma de introduzir os meses de modo a aproximarem-se do ano solar. Esta secção está dividida em várias subsecções, correspondendo cada um a um convergente. Considera-se relevante iniciar a análise do ciclo mais curto, de 2 anos, para o ciclo mais longo, de 189 anos.

4.2.1 O ciclo de 2 anos

O convergente $12 + \frac{1}{2}$ é o mais simples, este consiste na inserção de um mês, num ciclo de dois anos. Desta forma, têm-se um ano normal de 12 meses e um ano embolismal de 13 meses (ver [19]).

Este ciclo de dois anos tem 25 meses, com base no mês lunar tem-se 738 dias e com base no ano solar 730 dias. Estes dois valores estão muito próximos dos valores encontrados usando as constantes astronómicas do mês lunar e ano solar. Os 25 meses lunares correspondem a um total de 738,264725 dias. No sistema de calendários solares dois anos equivalem a 730,4844 dias. Verifica-se que esta estrutura permite que o ajustamento do calendário lunar ao calendário solar seja realizado de forma muito simples, todavia em apenas 2 anos obtêm-se 8 dias a mais. Neste ciclo existem 4 dias a mais por ano, dado que o ano solar tem 369 dias, (738 : 2), no entanto o ano solar tem 365 dias.

Este método traz sérias consequências, isto é, em 24 anos estar-se-ia na estação do ano seguinte, já que existiriam 93 dias a mais. De relembrar que uma estação do ano no hemisfério norte varia entre 90 e 92 dias.

4.2.2 O ciclo de 3 anos

Quando se analisa o convergente $12 + \frac{1}{3}$, sabe-se que num ciclo de 3 anos é inserido um mês. Os três anos são compostos de dois anos normais de 12 meses e um ano embolismal de 13 meses.

Este ciclo tem portanto 37 meses, com um total de 1092,6318 dias. Sabe-se que três anos solares são 1095,7265 dias. Inserindo um mês em cada 3 anos verifica-se que existe uma ausência de aproximadamente três dias. Neste ciclo existem um dia a menos por ano, dado que o ano aqui tem 364 dias, no entanto o ano solar tem 365 dias.

Repare-se que no decorrer dos anos, esta ausência de dias torna-se bastante significativa, já que num período de 90 anos obtêm-se 93 dias a menos, o que corresponde ao deslocamento da estação do ano atual à anterior.

4.2.3 O ciclo *octaeteris*

O ciclo *octaeteris* foi adotado pelos gregos em 450 a.C., esta invenção foi atribuída a Cleóstrato, um astrónomo da Grécia Antiga, mas está popularmente ligada a Eudóxio. Este ciclo é baseado no convergente $12 + \frac{3}{8}$. Este convergente mostra que num ciclo de 8 anos são inseridos 3 meses. Desta forma o ano lunar aproxima-se do ano trópico. O presente ciclo é composto por 5 anos normais de 12 meses e 3 anos embolismais de 13 meses. A determinação dos anos embolismais é explicada na subsecção 4.3.1 – calendário grego.

Este ciclo é composto por 99 meses lunares ($12 \times 8 + 3$), sendo baseado no ano lunar e no ano solar, e tem ciclo tem 2922 dias. O mês lunar tem 29,515151 dias, o que corresponde a um adiantamento de 22 minutos e 11,8 segundos relativamente ao mês lunar médio. No que diz respeito ao ano solar tem-se 365,25 dias, este tem um atraso de 11 minutos e 14 segundos relativamente ao ano solar.

Usando a constante astronómica do mês lunar obtém-se 2923,52841 dias. Sabe-se que 8 anos solares são compostos por 2921,93725 dias. Desta forma verifica-se que a relação entre o tempo lunar e o tempo solar é próxima, apresentando, apenas mais um dia e meio em cada 8 anos.

4.2.4 O ciclo de 11 anos

Não se encontraram evidências da utilização do convergente $12 + \frac{4}{11}$, relativamente ao calendário lunissolar, nos documentos consultados para a presente dissertação.

Porém tem-se um ano com 12 meses e são adicionados 4 meses num ciclo de 11 anos. Existem 136 meses lunares, ou seja, 4016,1601 dias. Os 11 anos solares correspondem a 4017,6641 dias. Neste sentido existe um adiantamento de um dia e meio.

4.2.5 O ciclo metónico

O ciclo metónico foi descoberto por Meton um astrónomo e matemático de Atenas do século V a.C., começou no solstício de verão do hemisfério norte no dia 27 de junho de 432 a.C.. Este ciclo é muito famoso porque a sua descoberta foi anunciada no período dos Jogos Olímpicos, e foi gravada em letras de ouro nas colunas do templo de Minerva. O presente ciclo foi utilizado por vários povos, entre os quais, os chineses no calendário chinês, os mesopotânicos no calendário da mesopotânia, e os hebreus no calendário hebreu.

O ciclo metónico baseia-se no convergente $12 + \frac{7}{19}$, com base no ano lunar. Meton descobriu que se inserisse 7 meses de 30 dias em 19 anos obtia aproximadamente o número de dias do calendário solar. Um ciclo de 19 anos é composto por 12 anos normais de

12 meses e de 7 anos embolismais de 13 meses.

O ciclo de 19 anos tem um total de 235 meses lunares, $(12 \times 19 + 7)$. O mês lunar tem 29,530589 dias, os 235 meses lunares têm 6939,688415 dias. O ano solar tem 365,242199 dias, os 19 anos solares têm 6939,601781 dias. Sublinha-se que um ano tem um número inteiro de dias, logo um ciclo de 19 anos corresponde a 6940 dias, de acordo com as referências bibliográficas consultadas (ver [7]).

Ao calcular o número de dias do mês lunar e do ano solar no ciclo de Meton o erro é na ordem de $\frac{1}{3}$ de dias num ciclo de 19 anos. Para a verificação deste erro é necessário calcular a aproximação do mês lunar e do ano solar. Assim têm-se duas situações distintas, primeiramente deve saber-se qual o número de dias do mês lunar no ciclo de Meton, e como tal divide-se os dias pelos meses lunares do mesmo ciclo. De seguida, deve entender-se qual o número de dias do ano solar no ciclo de Meton, assim divide-se os dias pelos anos solares deste ciclo.

Dividindo 6940 dias por 235 meses, obtém-se o mês lunar do ciclo de Meton. Isto é,

$$\frac{6940}{235} = 29 + \frac{25}{47}$$

o mês lunar no ciclo de Meton tem 29,531915 dias, e como o mês lunar tem 29,530589 dias, em 235 meses lunares obtém-se uma diferença positiva de 0,31161 dias relativamente ao mês lunar médio, como mostra o seguinte cálculo,

$$\begin{aligned}(29{,}531915 - 29{,}530589) \times 235 &= 0{,}001326 \times 235 \\ &= 0{,}31161 \text{ dias.}\end{aligned}$$

Seguidamente, o ano solar do ciclo de Meton corresponde à divisão de 6940 dias por 19 anos, deste modo pode observar-se a seguinte fração

$$\frac{6940}{19} = 365 + \frac{5}{19}\,.$$

Repare-se que o ano solar no ciclo de Meton tem 365,263158 dias, já o ano trópico é representado por 365,242199 dias, logo obtêm-se mais 0,398221 dias quando comparado com o ano solar,

$$\begin{aligned}(365{,}263158 - 365{,}242199) \times 19 &= 0{,}020959 \times 19\\ &= 0{,}398221 \text{ dias.}\end{aligned}$$

Diversos foram os astrónomos que tentaram compreender e reduzir o presente erro sendo de destacar Cálipo. Cálipo, astrónomo grego, em 330 a.C., desenvolveu o ciclo de Cálipo, este ciclo é composto por 4 ciclos metónicos que correspondem a 940 meses lunares, que representam 76 anos solares. Na sua teoria, Cálipo propõe então suprimir um dia em cada 4 ciclos metónicos, tem-se portanto 27759 dias, $(6940 \times 4 - 1)$ (ver [21]).

A aproximação para o mês lunar no ciclo de Cálipo é de

$$\frac{27759}{940} = 29 + \frac{499}{940}\,.$$

O mês lunar no ciclo de Cálipo tem 29,530851 dias, isto é, em 940 meses lunares há um deslocamento de cerca de 0,25 dias,

$$\begin{aligned}(29{,}530851 - 29{,}530589) \times 940 &= 0{,}000262 \times 940\\ &= 0{,}24628 \text{ dias.}\end{aligned}$$

Salienta-se que se esta regra não fosse aplicada o deslocamento seria de 1,25 dias, $(0{,}31161 \times 4 = 1{,}24644)$.

A aproximação para o ano solar no ciclo de Cálipo é de

$$\frac{27759}{76} = 365 + \frac{1}{4} \text{ dias.}$$

O ano solar no ciclo de Cálipo tem 365,25 dias, o que representa um deslocamento de cerca de 0,6 dias, ou seja,

$$\begin{aligned}(365{,}25 - 365{,}242199) \times 76 &= 0{,}007801 \times 76\\ &= 0{,}592876 \text{ dias.}\end{aligned}$$

Se esta regra não fosse aplicada o deslocamento seria de 1,6 dias $(0{,}398221 \times 4 = 1{,}592884)$.

Pode apurar-se que existe ainda a necessidade de ajustamento, e por isso, em 130 a.C, o astrónomo Hiparco apercebeu-se que o ano solar era mais curto do que 365 dias e $\frac{1}{4}$, resultado tirado do ciclo de Cálipo. Este astrónomo propôs agrupar 4 ciclos de Cálipo e suprimir um dia. Esta regra permite retificar o ciclo de Cálipo e consequentemente o ciclo metónico. Assim sendo, o ciclo de Hiparco tem 3760 meses lunares, ou seja possui 304 anos solares, o que corresponde a 111035 dias $(27759 \times 4 - 1)$.

Como o mês lunar é de 29,530589 dias, a aproximação encontrada por Hiparco é muito boa, ora repare-se

$$\begin{aligned}\frac{111035}{3760} &= 29 + \frac{399}{752} \\ &= 29{,}530585 \quad \text{dias.}\end{aligned}$$

Este também obteve bons resultados na aproximação do ano solar, o ano solar tem 365,242199 dias e a sua aproximação é de

$$\begin{aligned}\frac{111035}{304} &= 365 + \frac{75}{304} \\ &= 365{,}246711 \quad \text{dias.}\end{aligned}$$

No entanto, de acordo com as evidências científicas e referentes na literatura, esta sugestão nunca foi aplicada, o ciclo de Cálipo foi efetivamente o mais utilizado e aceite pelos astrónomos (ver [17]).

4.2.6 O ciclo de 189 anos

No resultado $12 + \frac{67}{189}$ a fração tem um denominador superior a 100, querendo isto dizer que seria necessário juntar 67 meses em 189 anos, o que se reflete em 67 meses embolismais e 122 meses normais. Do ponto de vista matemático não haveria nenhuma dificuldade em aplicá-lo, no entanto seria difícil explicar à maioria da população quais seriam os anos embolismais.

4.3 Os diferentes tipos de calendário lunissolar

Ao longo da história foram surgindo diferentes tipos de calendários lunissolares, sendo de destacar o calendário grego, o calendário chinês, o calendário hebreu, o calendário celta e o calendário eclesiástico (ver [19]). Estes diferentes tipos de calendários foram construídos com base nos convergentes (ciclos) analisados anteriormente. Nesta secção apenas se abordam o calendário grego e o calendário hebreu.

4.3.1 Calendário grego

Durante muito tempo, a coexistência de um calendário lunar e de um calendário fundado nas estações do ano para as festas agrícolas foi utilizado pelos gregos. No decorrer dos anos da civilização grega, foram vários os calendários utilizados pelos mesmos, já que após alguns anos da criação de um determinado calendário, os mesmos verificavam que esse mesmo calendário não era o mais adequado e substituíam-o por outro. Salienta-se que, inclusive chegou a haver mais do que um calendário na mesma época para diferentes cidades.

No início os gregos tinham um calendário lunar de 12 meses com 354 dias. A evolução deste calendário foi feita através da inserção de um mês de vez em quando, com o objetivo de que o mesmo seguisse o ano solar. O ano em que se adicionava mais um mês passava a chamar-se embolismal (como referido na secção anterior), que significa 'juntar' em grego. Porém, como é evidente, a dificuldade começou no momento em que não se sabia bem em que ano se adicionava o mês.

Em 600 a.C., o ano embolismal era adicionado todos os dois anos, pode dizer-se que os gregos utilizavam o convergente $12 + \frac{1}{2}$ (subsecção 4.2.1), o ano tinha 369 dias. Este ano era muito longo, portanto esta ideia foi rapidamente abandonada.

Um século mais tarde, o progresso conduziu a uma melhor aproximação, um mês em cada três anos, isto é, o convergente $12+\frac{1}{3}$ (subsecção 4.2.2), o ano tem 364 dias, agora um ano muito curto.

A reflexão continuou e foi em 450 a.C. que os gregos aplicaram o convergente $12 + \frac{3}{8}$ (subsecção 4.2.3), conhecido como ciclo *octaeteris*. Este ciclo tem 5 anos normais de 12 meses e 3 anos embolismais de 13 meses. O 13° mês é inserido no final do ano, este mês é composto por 30 dias.

Para definir os anos embolismais, pode fazer-se recurso à astronomia analisando o deslocamento do sol. Com base na mesma o primeiro dos três meses é inserido antes de existir um deslocamento superior a 15 dias relativamente ao sol. Neste sentido, consultando uma quadro que mostra o afastamento do sol, no fim de cada ano, os três meses inseridos no ciclo de 8 anos são colocados no final do 2°, 5° e 7° ano. Mas os gregos não utilizaram esta versão, optando assim por juntar o 13° no final do 3°, 5° e 8° ano.

No quadro 4.1 apresenta-se o resumo do ciclo *octaeteris*. Observa-se que os anos embolismais, E, nas duas versões correspondem exatamente ao mesmo ciclo, mas com uma translação de dois anos, onde N representa os anos normais. Não foram encontradas evidências na literatura consultada do porquê desta utilização pelos gregos.

Quadro 4.1: O ciclo *octaeteris*

Versão	N	N	**E**	N	**E**	N	N	**E**
1	1° Ano	2° Ano	**3° Ano**	4° Ano	**5° Ano**	6° Ano	7° Ano	**8° Ano**
2	3° Ano	4° Ano	**5° Ano**	6° Ano	**7° Ano**	8° Ano	1° Ano	**2° Ano**

O ciclo *octaeteris* tem uma boa aproximação ao ano solar, com 365,25 dias, mas com tendência a afastar-se do mês lunar, com 29,515152 dias. Com este ciclo os gregos aproximaram-se do ano solar mas afastaram-se do mês lunar.

A evolução no calendário grego passou pelas simplificações $12+\frac{1}{2}$, $12+\frac{1}{3}$ e $12+\frac{3}{8}$. Esta última permitiu uma melhor aproximação do ano lunar ao ano solar. Sem embargo, a evolução do calendário grego não podia terminar com o ciclo *octaeteris*, pois como se pode ver nos convergentes da fração continuada existe o convergente $12 + \frac{7}{19}$, este convergente permite ainda uma melhor aproximação do ano lunar ao ano solar.

O convergente $12+\frac{7}{19}$ foi descoberto por Meton no século V a.C., este convergente denomina-se ciclo metónico em homenagem a Meton. Como já explicado anteriormente, na subsecção 4.2.5, este é ciclo com 19 anos dividido em 12 anos normais de 12 meses e 7 anos embolismais de 13 meses.

Considerando a análise do desvio da lua e do desvio do sol no final do ano, o 13° mês é adicionando quando o desvio do sol ainda é inferior a 14,7 dias, isto é, meio mês lunar. No calendário grego, de acordo com o ciclo metónico, os anos embolismais são o 2°, 5°, 7°, 10°, 13°, 15°e 18°.

Em 46 a.C., o calendário juliano (capítulo 3.2) foi introduzido, sendo usado até ao início do século XX. Atualmente, e desde 1923, os gregos usam o calendário gregoriano (capítulo 3.3).

4.3.2 Calendário hebreu

O calendário hebreu pretende harmonizar simultaneamente o ciclo lunar e o ciclo solar, como fazem todos os calendários do sistema de calendários lunissolares. Como no calendário islâmico, secção 2.2, os dias começam com o pôr do sol e a semana, no calendário hebreu, começa no domingo. Este calendário teve início no dia 7 de outubro de 3761 a.C. (calendário juliano, secção 3.2), considerado o ano da criação do mundo pelo povo hebreu. O mesmo passou por diferente etapas. Aborda-se nesta subsecção a unificação, em 359 a.C., o patriarca Hillel II instaurou um calendário lunissolar, que ainda é utilizado hoje em dia (ver [9]).

O calendário hebreu é baseado no ciclo metónico, explicado na subsecção 4.2.5. O ciclo metónico é um ciclo de 19 anos, com 12 anos normais de 12 meses e 7 anos embolismais de 13 meses. Os meses têm alternadamente 30 e 29 dias, mas no calendário hebreu existe uma particularidade, o oitavo mês e nono mês de acordo com alguns critérios não abordados nesta dissertação podem alternar entre 29 e 30 dias. Adicionam-se todos os dias de cada mês e obtém-se para o ano normal uma duração entre 353 e 355 dias e para o ano embolismal entre 383 e 385 dias. No quadro 4.2, pode visualizar-se o número de dias no ano normal e no ano embolismal segundo o tipo de ano.

Quadro 4.2: Duração do ano em dias no calendário hebreu

Tipo de ano	Ano incompleto	Ano regular	Ano completo
Ano normal	353	354	355
Ano embolismal	383	384	385

No calendário hebreu os anos embolismais ocorrem no 3°, 6°, 8°, 11°, 14°, 17°, 19° ano tendo em conta um ciclo de 19 anos, ciclo metónico. Para calcular os anos embolismais utiliza-se a fórmula onde h_{ano} é um ano embolismal no calendário hebreu

$$h_{ano} = ((7 \times h_{ano} + 1) \mod 19) < 7\ .$$

Com base na astrologia, o mês é inserido quando o deslocamento do ano lunar é superior a um mês. Comparando os anos embolismais no calendário grego com o calendário hebreu verifica-se que existe uma translação de 9 anos.

Conclusão

As frações continuadas são importantes para a construção dos calendários independentemente do tipo de ciclo que se escolha. Estas permitem determinar aproximações tão próximas quanto desejado das constantes astronómicas. Repare-se que estas constantes são números irracionais, sendo que através das frações continuadas obtém-se números racionais.

Com base na revisão da literatura efetuada no capítulo 2, pode conclui-se que o calendário islâmico está intrinsecamente ligado à religião, visto que se encontra relatado que num dado momento da história se pretendeu optar pelo calendário lunissolar, contudo devido à forte ligação do calendário islâmico à religião esta proposta foi rejeitada.

A revisão da literatura efetuada no capítulo 3 possibilitou, ainda, concluir que o calendário gregoriano advém do calendário juliano. Isto porque o calendário juliano começou a ser utilizado no ano 45 a.C. e o calendário gregoriano em 1582. Repare-se que o último calendário mencionado surgiu devido à má estimativa feita pelo astrónomo Sosígenes sob ordem de Júlio César. Esta estimativa levou à ausência de 10 dias para um período de 1600 anos. Para compensar esta ausência foi instaurado o calendário gregoriano. Contudo, deve realçar-se que à semelhança do calendário juliano também o calendário gregoriano apresenta limitações, visto que, existe uma diferença de um dia relativamente ao calendário solar astronómico a cada 3300 anos.

Ainda referente as conclusões do capítulo 3 pode evidenciar-se que foram criados outros calendário para além do calendário juliano e gregoriano, nomeadamente os calendários solar Persa, Van Mädler e republicano. No entanto, devido à dificuldade em adaptar-los à realidade (calendário Van Mädler) ou às suas demasiadas especifidades (calendário republicano) este não foram utilizados e/ou foram utilizados por um período de tempo reduzido.

Concluiu-se, no decorrer da revisão realizada no capítulo 4, que o calendário grego utilizou diferentes convergentes ao longo dos séculos. Porém, apesar de todo o esforço realizado pelos científicos para reduzir o erro associado ao ciclo, em 1923 os mesmos adotaram o calendário gregoriano. Salienta-se que este esforço não foi em vão, já que um dos convergentes (denominado o ciclo metónico) é utilizado no calendário hebreu.

Na imagem 4.1, apresenta-se o resumo da cronologia dos diferentes calendários, estudos nesta dissertação. Como se pode constatar o calendário hebreu foi o único que se baseou na criação do mundo. Mais se acrescenta que os diferentes tipos de calendários reportam-se ao calendário juliano até ao dia 5 de outubro de 1582. Após esta data, no dia 15 de outubro de 1582, começou-se a utilizar o calendário gregoriano.

Hoje em dia o calendário grego corresponde ao calendário gregoriano, como já explicado e mencionado anteriormente.

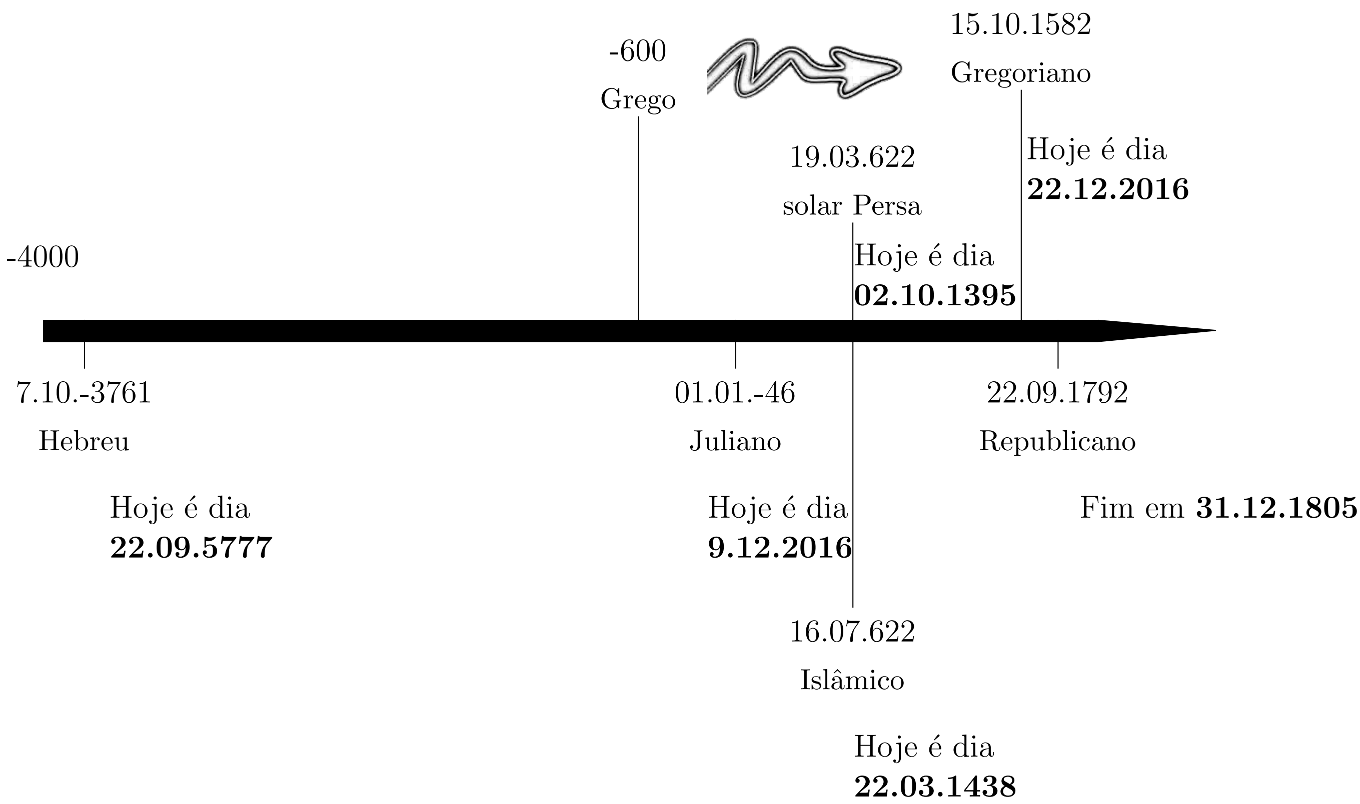

Figura 4.1: Cronologia dos diferentes tipos de calendário

Na figura 4.2, pode observar-se o resumo dos calendários e os respetivos convergentes. Como se pode ver o dia 22 de dezembro de 2016 no calendário gregoriano corresponde a diferentes datas associadas aos restantes calendários. Isto segue a mesma linha de pensamento que o cronograma apresentado na figura 4.1, onde é possível obter diferentes datas para o mesmo período de tempo.

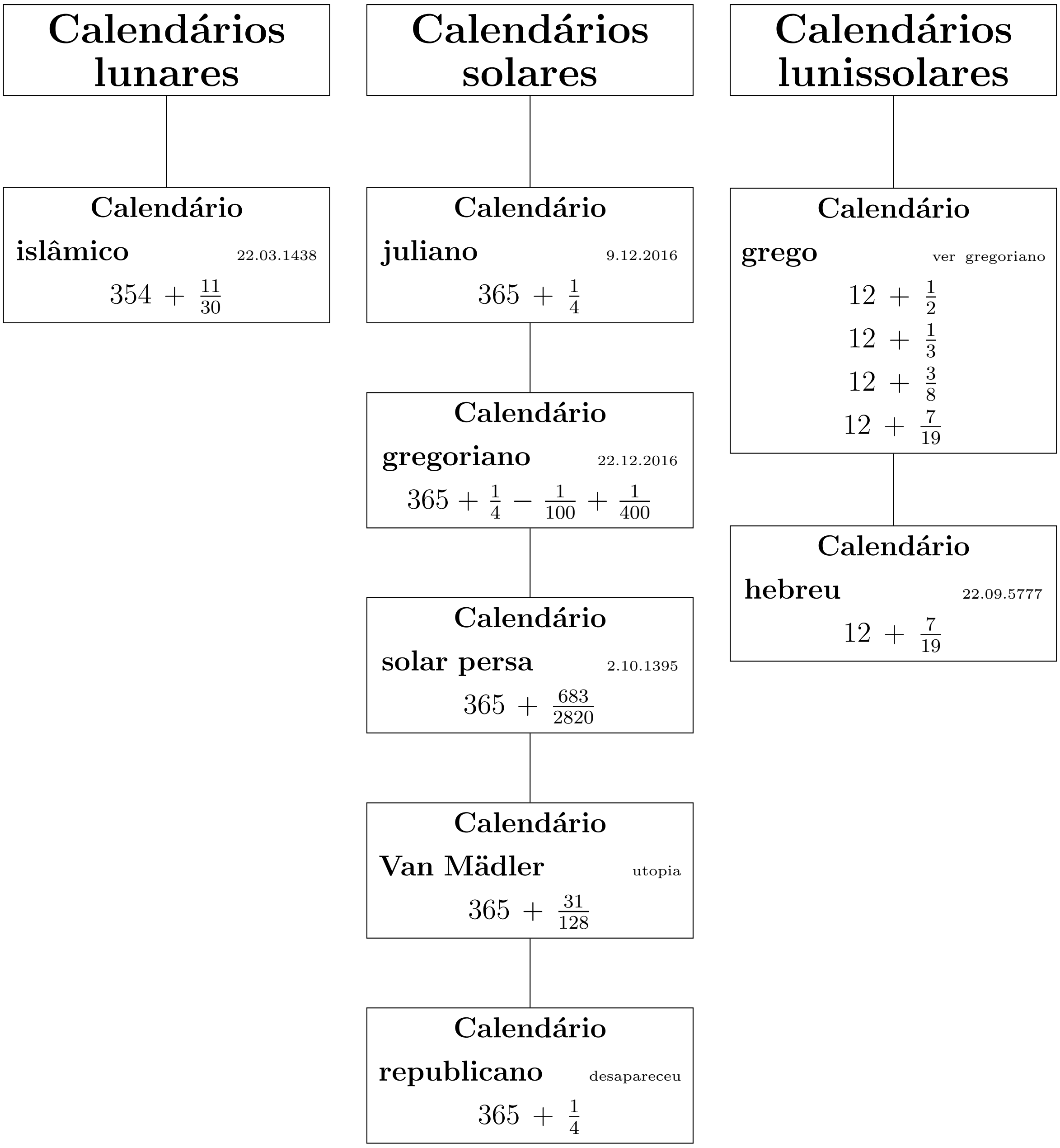

Figura 4.2: Diferentes tipos de calendário e convergente(s) associado(s)

Sentiu-se dificuldades em encontrar referências bibliográficas com qualidade científica, já que existe bastante informação em suporte eletrónico. No entanto, a maioria da mesma está associada a *blogs*, Wikipédia e apresentações não cientificas, não sendo constituída portanto como fidedigna. Acredita-se que a justificação para a presente situação se encontra relacionada com o facto de o tema ser bastante popular, uma vez que existem muitas pessoas (no geral) que gostam de falar sobre o referido assunto.

Como se pode perceber, ainda existem lacunas no estudo dos calendários, que carecem de maior investigação e esclarecimento. Sugere-se que sejam realizados outros estudos, que possam contribuir para um aumento do conhecimento dos calendários associados não apenas aos três fenómenos apresentados, mas também ao período sideral. Este é o período que decorre entre duas posições idênticas sucessivas de um corpo celeste, relativamente às estrelas fixas. O ano sideral representa o tempo que a Terra necessita para completar a sua órbita elíptica ao Sol.

Bibliografia

[1] A. Aveni *Empires of Time: Calendars, Clocks, and Cultures*. Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1989.

[2] J. Ben-Dov Wayne Horowitz and J. M. Steele *Living the Lunar Calendar*. Oxbow Books, Oxford, UK, 2012.

[3] R. Bien *Gauss and Beyond: The Making of Easter Algorithms*. Arch. Hist. Exact Sci. 58 (2004) 439–452
https://www.staff.science.uu.nl/~gent0113/hovo/downloads/text1_08b.pdf.

[4] J. Bourgoing *Le Calendrier Maître du Temps*. Découvertes Gallimard Histoire, 2000.

[5] K. Canes *The Esoteric Codex: Obsolete Calendars*. Lulu.com, 2016.

[6] A Source Book By Marshall Clagett *Ancient Egyptian Science, Volume II, Calendars, Clocks, and Astronomy*. American Philosophical Society, Independence Square, Philadelphia, 1995.

[7] Conseil générale du Cher *Histoire du calendrier, Images du temps*. Skira Seuil, 2000.

[8] M. Doucet *Le Calendrier Perpetuel : Comment déterminer mentalment en quelques secondes n'importe quel jour de la semaine de n'importe quelle date*. Kindle Edition, London, 2015.

[9] N. Dershowitz, E.M. Reingold *Calendrical calculations, Third Edition*. Cambridge University press, New York, 2008.

[10] R.H. van Gent *Islamic-Western Calendar Converter : Based on the Arithmetical or Tabular Calendar*. Mathematical Institute Utrecht University2015,
http://www.staff.science.uu.nl/~gent0113/islam/islam_tabcal.htm

[11] L. Haddad et G. Duprat *Cosmos : Une Histoire du Ciel*. Éditions du Seuil, Paris, 2009.

[12] R. Hannah *Greek and Roman Calendars: Constructions of Time in the Classical World*. Duckworth, London, 2005.

[13] G. H. Hardy, E. M. Wright *An Introduction to the Theory of Numbers*. Posts & Telecom Press, Publishers, 2008.

[14] D. Hensley *Continued Fractions*. World Scientific, Texas A&M University, 2006.

[15] History.info 1616: Did Miguel Cervantes and William Shakespeare Die the Same Day?. `Availablefromhttp://history.info/society/culture/1616-did-miguel-cervantes-and-william-shakespeare-die-the-same-day/`, (); accessed 27 October 2016.

[16] J. Leford *La saga des calendriers ou le frisson millénariste*, Bibliothèque pour la science, Paris : Pour la Science, 1998.

[17] V. K. Mishra, Ph.D. *The Calendars of India*. Cornell University Library, 2010. `https://arxiv.org/pdf/1007.0062.pdf`

[18] O Pavlyshyn *The Calendar Question in the Ukrainian Greek Catholic Church*, 1900-1930, Journal of Ukrainian Studies, 2012.

[19] Directrice de la collection : Mme A.-H. Ratouly *Questions d'astronomie 1 : calendriers et éclipses*. Commission Inter-IREM Astronomie, Limousin, 1999.

[20] H. Reints *Easter date algorithms*. 1999, `http://www.henk-reints.nl/easter/index.htm?frame=easteralg2.htm`.

[21] E. G. Richard *Mapping Time: The Calendar and Its History*.Oxford University Press, 1999.

[22] K. H. Rosen *Elementary Number Theory and Its Application*. Library of Congress Cataloging and Publication Data, 1986.

[23] E. Schatzman *Astronomie*. Encyclopédie de la Pléiade, Paris, 1962.

[24] C. Tondering *The Persian calendar, The Calendar FAQ*, 2016, `http://www.tondering.dk/claus/cal/persian.php`.

[25] H. S. Wall *Analytic Theory of Continued Fractions*. Chelsea Publishing Company Bronx, New York, 1967.

[26] J. J. Watkins *Number Theory A Historical Approach*. Princeton University Press, New Jersey, 2014.

[27] M. Ch. Zeller *Problema duplex calendarii fundamentale*. Bulletin de la Société Mathématique de France, **11**, 1883, pág 59-61.

[28] *Biographie de mathématiciens*. Bibmath.net. `http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=gauss`